Méthodes numériques II (cours 1 et 2)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2018/03/05

Part IV

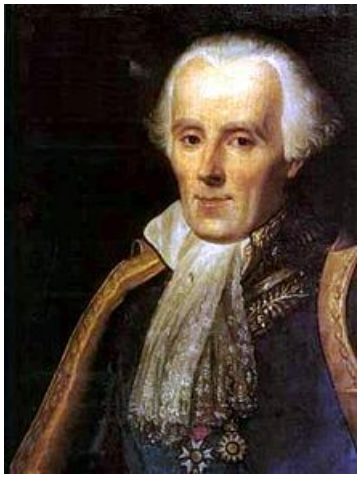
Résolution numérique des E.D.P.

1. Exemples d'E.D.P.
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
4. Méthode des différences finies 1D
5. Problème modèle évolutif

Plan

1. Exemples d'E.D.P.
   - Equation de Laplace/Poisson
   - Equation de la chaleur
   - Equation des ondes
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
   - Dimension 1
   - Dimension $n > 1$
4. Méthode des différences finies 1D
   - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
   - EDP stationnaire + CL mixtes
5. Problème modèle évolutif
   - Schéma explicite
   - Schéma implicite

Equation de Laplace et équation de Poisson



Pierre-Simon Laplace 1749-1827, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français

Siméon Denis Poisson 1781-1840, mathématicien, géomètre et physicien français

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

où Δ est l'opérateur laplacien : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
Equation de Laplace si $f = 0$, sinon équation de Poisson.

Conditions aux limites

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de $\partial\Omega$,

$$u = g, \quad \text{sur } \Gamma_D \subset \partial\Omega. \tag{4.2}$$

- **Neumann** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{sur } \Gamma_N \subset \partial\Omega. \tag{4.3}$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad}\, u, \boldsymbol{n} \rangle$ avec $\boldsymbol{n}$ normale exterieure unitaire à Ω

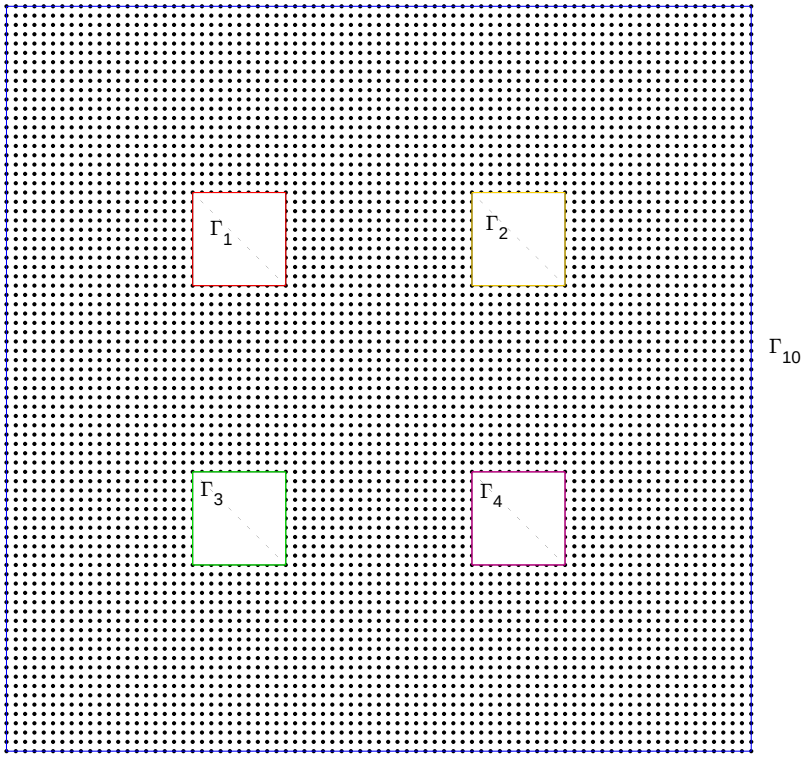
- **Robin** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \quad \text{sur } \Gamma_R \subset \partial\Omega. \tag{4.4}$$

Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

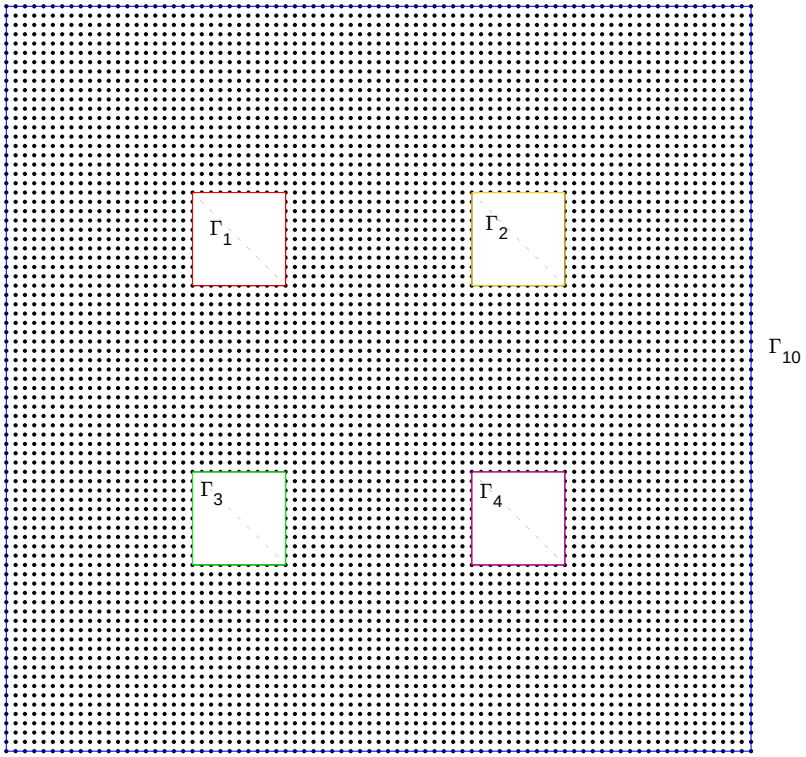
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \quad \text{on } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\ u &= 1 \quad \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \end{aligned}$$

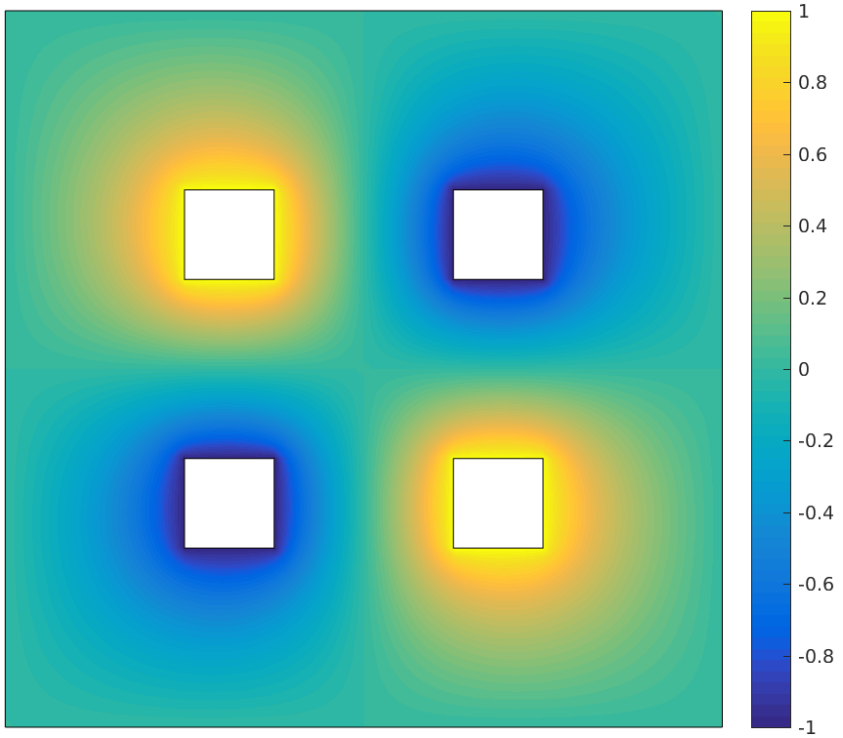


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\
u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{10}, \\
u &= -1 \quad \text{on } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\
u &= 1 \quad \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma 4,
\end{aligned}
$$

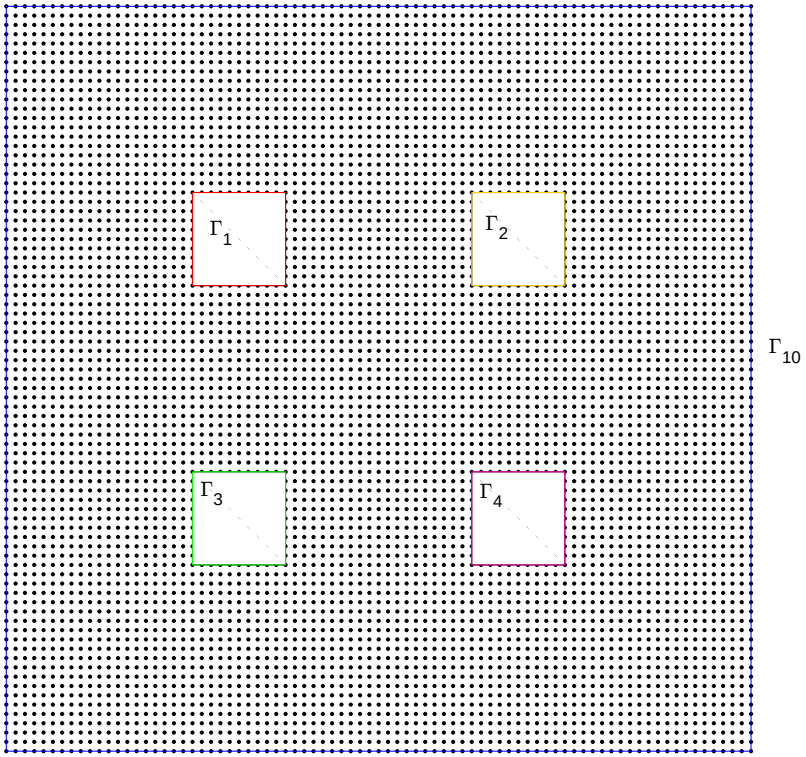


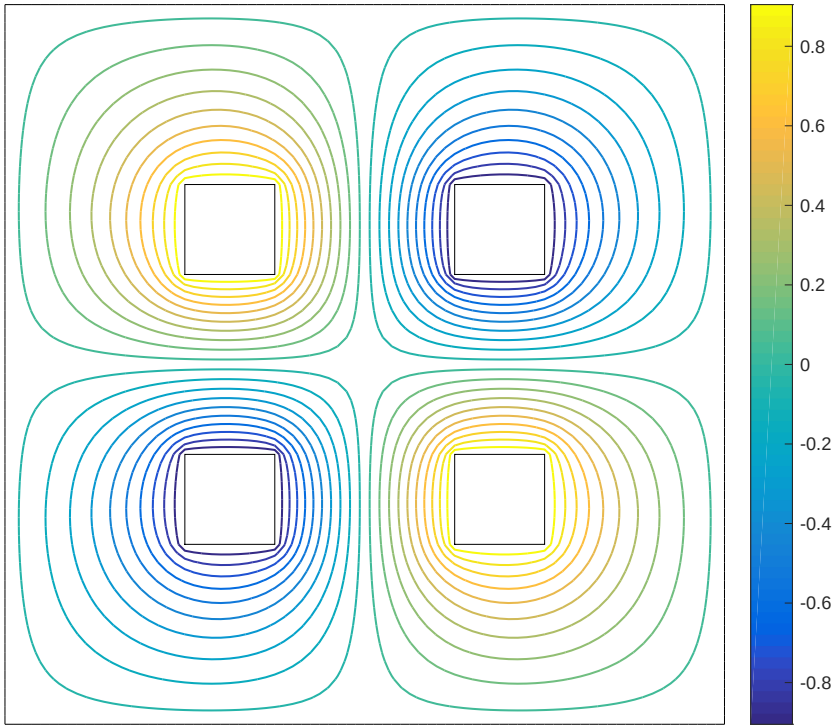


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\
u &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{10}, \\
u &= -1 \quad \text{on } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\
u &= 1 \quad \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma 4,
\end{aligned}
$$

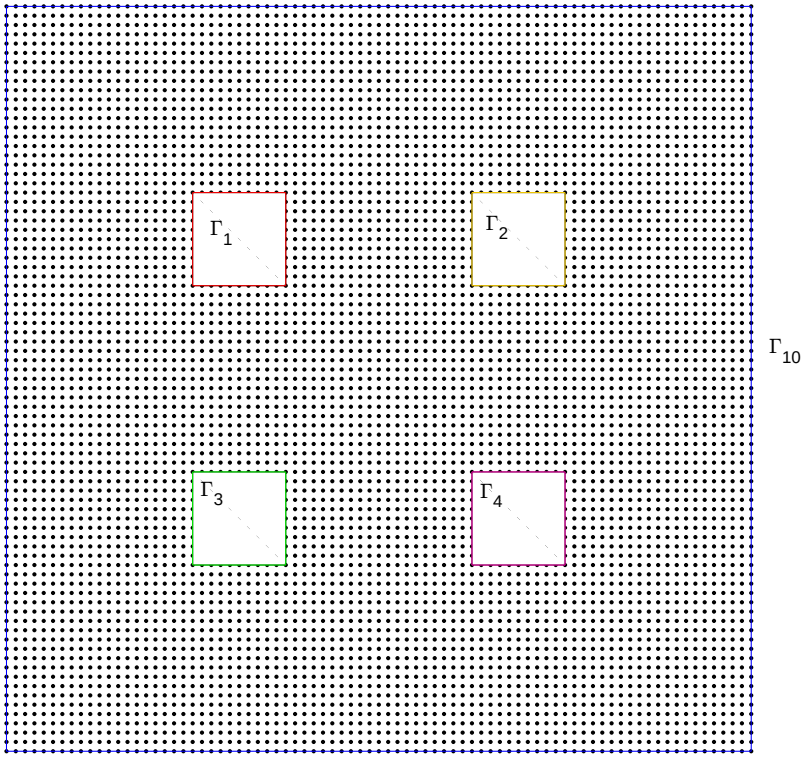




Champ de vitesses en 2D : $\boldsymbol{V} = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

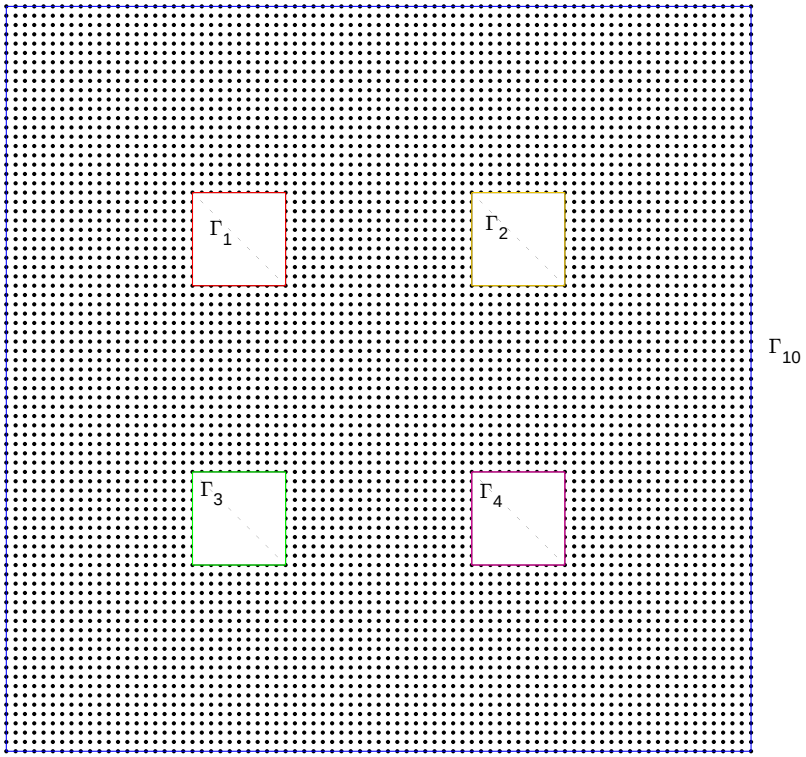
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\ u &= 1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$

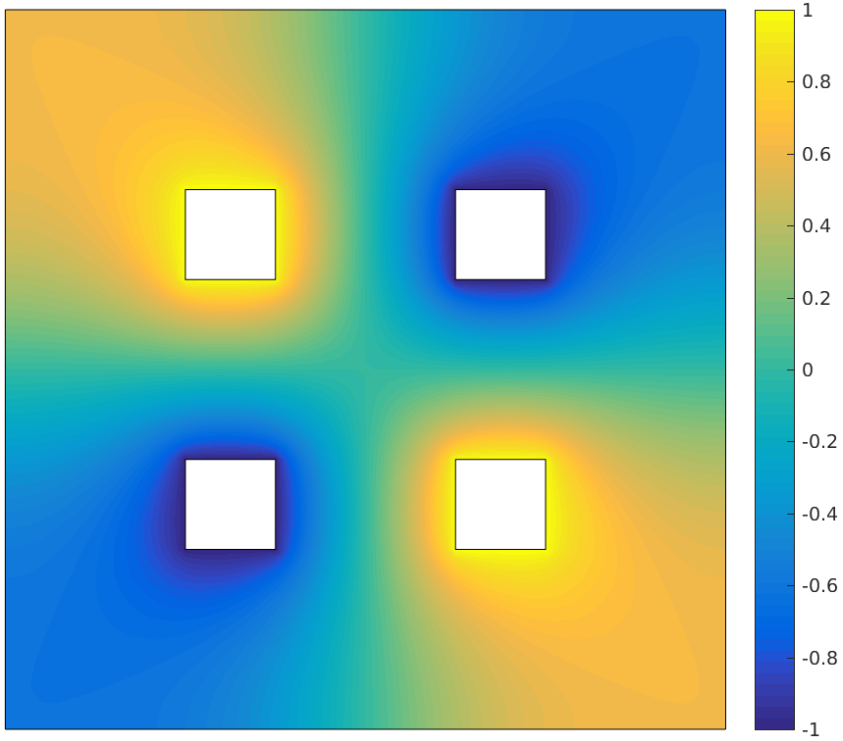


Champ de vitesses en 2D : $\boldsymbol{V} = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\
u &= -1 \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\
u &= 1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_{10}.
\end{aligned}
$$

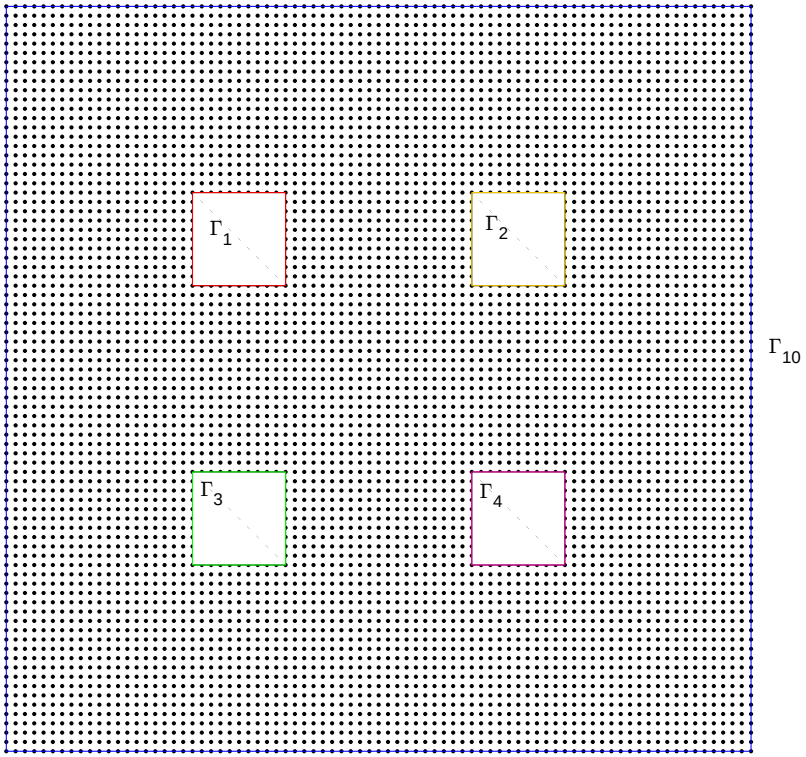


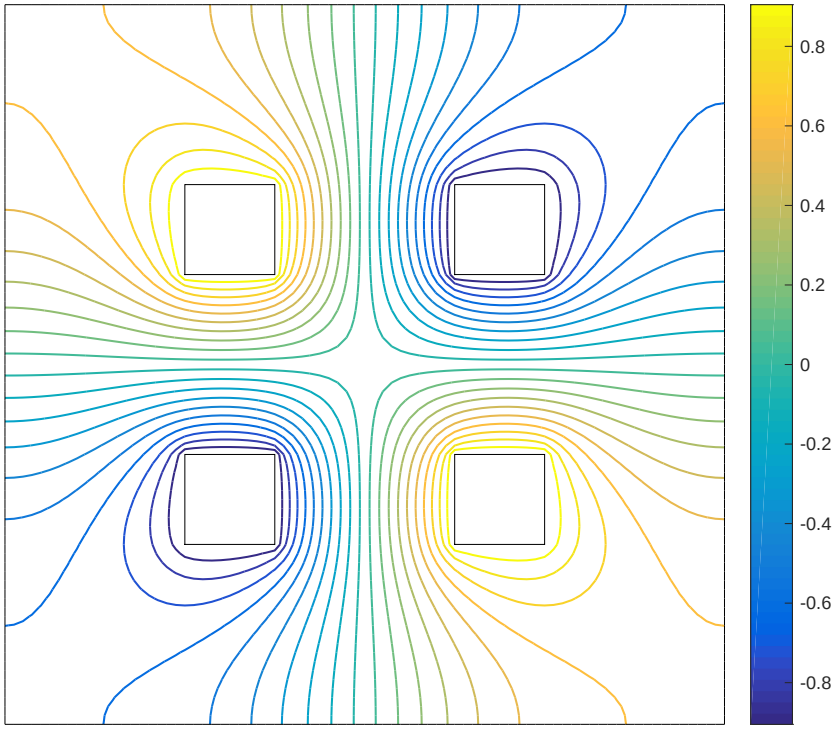


Champ de vitesses en 2D : $\boldsymbol{V} = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\
u &= -1 \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\
u &= 1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma 4, \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_{10}.
\end{aligned}
$$





Problème mal posé

Problème en dimension n

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

Ce problème est **mal posé** : non unicité de la solution.

$$u \text{ solution} \quad \Rightarrow \quad u + \text{constante solution}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) - D\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{f(t,\boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,\, T] \tag{4.5}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- D, coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s),
- f, production volumique de chaleur (en W/m^3),
- ρ, masse volumique du matériau (en kg/m^3),
- c, chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg/K$),
- Δu laplacien (en espace) : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) - D\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{f(t,\boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,\, T] \tag{4.5}$$

Problème bien posé :

- **condition initiale**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \tag{4.6}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,\, T] \quad u(t,\boldsymbol{x}) = g_D(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Neumann** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,\, T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Robin** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,\, T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) + \alpha u(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

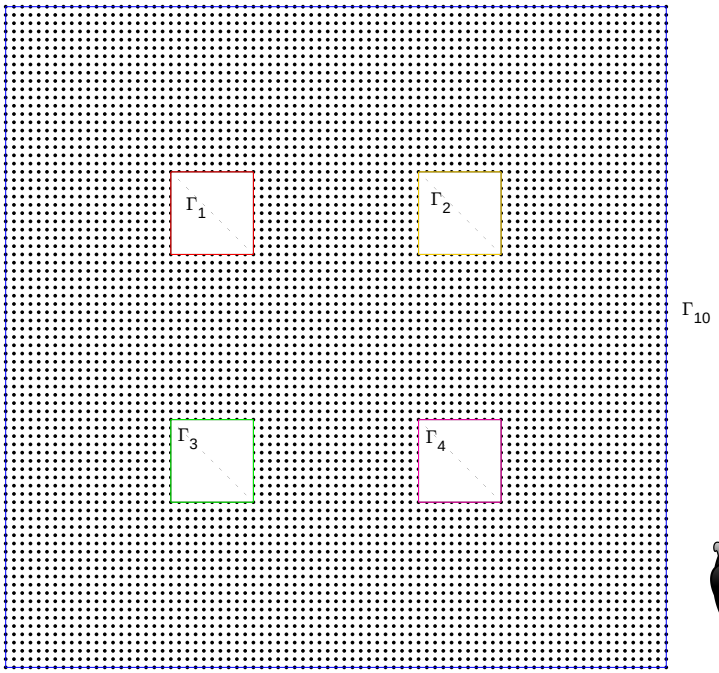
Problème de chaleur en 2D

Find $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u &= 0 \quad \text{in } [0, T] \times \Omega, \\
u(0, \boldsymbol{x}) &= 20 \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_{10}, \\
u &= g_1 \quad \text{on } \Gamma_2 \cup \Gamma 3, \\
u &= g_2 \quad \text{on } \Gamma_1 \cup \Gamma 4,
\end{aligned}$$

où Ω (cotés de $20cm$)

- $D = 98.8 \times 10^{-6}$ (aluminium) ou $D = 23.9 \times 10^{-6}$ (plomb),
- $\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma 3$, $g_1(t, \boldsymbol{x}) = (20 + 40t)$ si $t <= 1$ et $g_1(t, \boldsymbol{x}) = 60$ sinon,
- $\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma 4$, $g_2(t, \boldsymbol{x}) = (20 + 80t)$ si $t <= 1$ et $g_2(t, \boldsymbol{x}) = 100$ sinon.



Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) - c^2 \Delta u(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T] \tag{4.7}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- $c > 0$ vitesse de propagation de l'onde,

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) - c^2 \Delta u(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T]$$

- **conditions initiales**

$$u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ \textbf{[position initiale]} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,\boldsymbol{x}) = v_0(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ \textbf{[vitesse initiale]} \tag{4.9}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad u(t,\boldsymbol{x}) = g_D(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Neumann** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Robin** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) + \alpha u(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

Plan

1. Exemples d'E.D.P.
   - Equation de Laplace/Poisson
   - Equation de la chaleur
   - Equation des ondes
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
   - Dimension 1
   - Dimension $n > 1$
4. Méthode des différences finies 1D
   - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
   - EDP stationnaire + CL mixtes
5. Problème modèle évolutif
   - Schéma explicite
   - Schéma implicite

Résolution numérique d'EDP

Méthodes déterministes :

- **méthode des différences finies**
- **méthode des éléments finis**
- **méthode des volumes finis**

Plan

1. Exemples d'E.D.P.
   - Equation de Laplace/Poisson
   - Equation de la chaleur
   - Equation des ondes
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
   - Dimension 1
   - Dimension $n > 1$
4. Méthode des différences finies 1D
   - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
   - EDP stationnaire + CL mixtes
5. Problème modèle évolutif
   - Schéma explicite
   - Schéma implicite

Opérateurs aux différences finies

Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière, $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$(D_h^+\varphi)(x) = \frac{1}{h}\left(\varphi(x+h) - \varphi(x)\right) \tag{4.12}$$

$$(D_h^-\varphi)(x) = \frac{1}{h}\left(\varphi(x) - \varphi(x-h)\right) \tag{4.13}$$

$$(D_h^0\varphi)(x) = \frac{1}{2h}\left(\varphi(x+h) - \varphi(x-h)\right) \tag{4.14}$$

- D_h^+ **opérateur progressif/décentré avancé**
- D_h^- **opérateur rétrograde/décentré retardé**
- D_h^0 **opérateur centré**

Definition 4.1

Soit $h > 0$. On dit qu'un opérateur aux différences finies D_h est une approximation consistante d'ordre p de $\frac{d^k\varphi}{dx^k}$ si pour tout $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière on a

$$\max_{x\in[a,b]} \left| (D_h\varphi)(x) - \frac{d^k\varphi}{dx^k}(x) \right| \leqslant Ch^p, \tag{4.15}$$

où C est une constante indépendante de h.

Proposition 4.2

Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est suffisament régulière, les opérateurs D_h^+ et D_h^- appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{d\varphi}{dx}$ et l'opérateur D_h^0 appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}$.

Exercise 7.1

Soient $h >$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant

$$\begin{aligned}
(D_h^+\varphi)(x) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(x+h)-\varphi(x)\right)\\
(D_h^-\varphi)(x) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(x)-\varphi(x-h)\right)\\
(D_h^0\varphi)(x) &= \frac{1}{2h}\left(\varphi(x+h)-\varphi(x-h)\right)
\end{aligned}$$

Q.1 *Monter que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e.* $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\forall\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $D_h(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda D_h\varphi+\mu D_h\psi$.*)*
Q.2 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 2$. *Montrer que les opérateurs* D_h^+ *et* D_h^- *sont des approximations consistantes d'ordre* 1 *de* $\frac{d\varphi}{dx}$.
Q.3 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 3$. *Montrer que l'opérateur* D_h^0 *est une approximation consistante d'ordre* 2 *de* $\frac{d\varphi}{dx}$.

Proposition 4.3

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$. On note D_h^2 l'opérateur défini, pour tout $x \in]a,b[$ et $h > 0$ tels que $x \pm h \in [a,b]$, par

$$(D_h^2\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h^2}\left[\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)\right]. \tag{4.16}$$

Alors $D_h^2\varphi$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. De plus on a

$$D_h^2\varphi = D_{\frac{h}{2}}^0(D_{\frac{h}{2}}^0\varphi) = D_h^+(D_h^-\varphi) = D_h^-(D_h^+\varphi) \tag{4.17}$$

est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$.

Démonstration en exercice

Proposition 4.4: (admis)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}(U)$ alors $\forall \boldsymbol{x} \in U$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]} \in U$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel quel

$$f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}^{[i]}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{r} \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(\boldsymbol{x}) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}(\boldsymbol{x}+\theta h\boldsymbol{e}^{[i]}) \quad (4.18)$$

où $\boldsymbol{e}^{[i]}$ est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Opérateurs aux différences finies en dimension $n > 1$

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière, $h > 0$ et $i \in [\![1, n]\!]$

$$(D^+_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x})\Big) \tag{4.19}$$

$$(D^-_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\Big) \tag{4.20}$$

$$(D^0_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\Big) \tag{4.21}$$

Exercise 7.2

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisament régulière, $h > 0$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant définis pour $i \in [\![1, 2]\!]$

$$\begin{aligned}
(D^+_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x})\right) \\
(D^-_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\left(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right) \\
(D^0_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2h}\left(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right)
\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{e}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q.1 *Monter que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_{h,i}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda D_{h,i}\varphi + \mu D_{h,i}\psi$.)*

Q.2 *On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ avec $k \geqslant 2$. Montrer que les opérateurs $D^+_{h,i}$ et $D^-_{h,i}$ appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.*

Q.3 *On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ avec $k \geqslant 3$. Montrer que l'opérateur $D^0_{h,i}$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.*

Proposition 4.5

Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est suffisament régulière, les opérateurs $D^+_{h,i}$ et $D^-_{h,i}$ appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ et l'opérateur $D^0_{h,i}$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

Proposition 4.6

Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi \in \mathcal{C}^4(U \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On note $D^2_{h,i}$ l'opérateur défini, pour tout $\boldsymbol{x} \in U$ et $h > 0$ vérifiant $\boldsymbol{x} \pm h\boldsymbol{e}^{[i]} \in U$, par

$$(D^2_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h^2}\left[\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - 2\varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\right] \tag{4.22}$$

Alors $D^2_{h,i}\varphi$ est approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$.
De plus, on a

$$D^2_{h,i}\varphi = D^0_{\frac{h}{2},i}(D^0_{\frac{h}{2},i}\varphi) = D^+_{h,i}(D^-_{h,i}\varphi) = D^-_{h,i}(D^+_{h,i}\varphi). \tag{4.23}$$

Plan

1. Exemples d'E.D.P.
   - Equation de Laplace/Poisson
   - Equation de la chaleur
   - Equation des ondes
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
   - Dimension 1
   - Dimension $n > 1$
4. Méthode des différences finies 1D
   - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
   - EDP stationnaire + CL mixtes
5. Problème modèle évolutif
   - Schéma explicite
   - Schéma implicite

1 Exemples d'E.D.P.
- Equation de Laplace/Poisson
- Equation de la chaleur
- Equation des ondes

2 Méthodes de résolution numérique d'EDP

3 Opérateurs aux différences finies
- Dimension 1
- Dimension $n > 1$

4 Méthode des différences finies 1D
- EDP stationnaire 1D + Dirichlet
- EDP stationnaire + CL mixtes

5 Problème modèle évolutif
- Schéma explicite
- Schéma implicite

Soient $a < b$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.

EDP modèle stationnaire 1D

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, && (4.24)\\ u(a) &= \alpha, && (4.25)\\ u(b) &= \beta. && (4.26) \end{aligned}$$

ou

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, && (4.27)\\ u(a) &= \alpha, && (4.28)\\ u(b) &= \beta. && (4.29) \end{aligned}$$

Chercher u ou $u(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (infinité de points!)

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

$$x_i = a + ih, \quad \forall i \in [\![0, N]\!], \text{ avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-u''(x_i) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{4.30}$$

$$u(x_0) = \alpha, \tag{4.31}$$

$$u(x_N) = \beta. \tag{4.32}$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{4.33}$$

$$u(x_0) = \alpha, \tag{4.34}$$

$$u(x_N) = \beta. \tag{4.35}$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{4.36}$$

$$u_0 = \alpha, \tag{4.37}$$

$$u_N = \beta. \tag{4.38}$$

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{4.36}$$

$$u_0 = \alpha, \tag{4.37}$$

$$u_N = \beta. \tag{4.38}$$

système linéaire de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues !

$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ & \vdots & & \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{cases}$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

$$
\begin{cases}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{cases}
$$

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0 \\
\hline
u_1 \\
u_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
u_{N-2} \\
u_{N-1} \\
\hline
u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha \\
\hline
h^2 f(x_1) \\
h^2 f(x_2) \\
\vdots \\
\vdots \\
h^2 f(x_{N-2}) \\
h^2 f(x_{N-1}) \\
\hline
\beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \quad (4.39)
$$

Proposition 4.1: admis

Le schéma aux différences finies (4.36)-(4.38) est consistant à l'ordre 2 avec l'EDP (4.24)-(4.26) et on a

$$\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \tag{4.40}$$

Exercise 8.1: (schéma étudié en cours)

Q.1 *Ecrire la fonction* ASSEMBLEMAT1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

où α, β *et* γ *sont des réels donnés.*
On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Q.2 *En prenant le jeu de données* $a = 0$, $b = 2\pi$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ *et* $f : x \mapsto \cos(x^2)$, *écrire un programme permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow$ SOLVE$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.
Q.3 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule* (4.40).

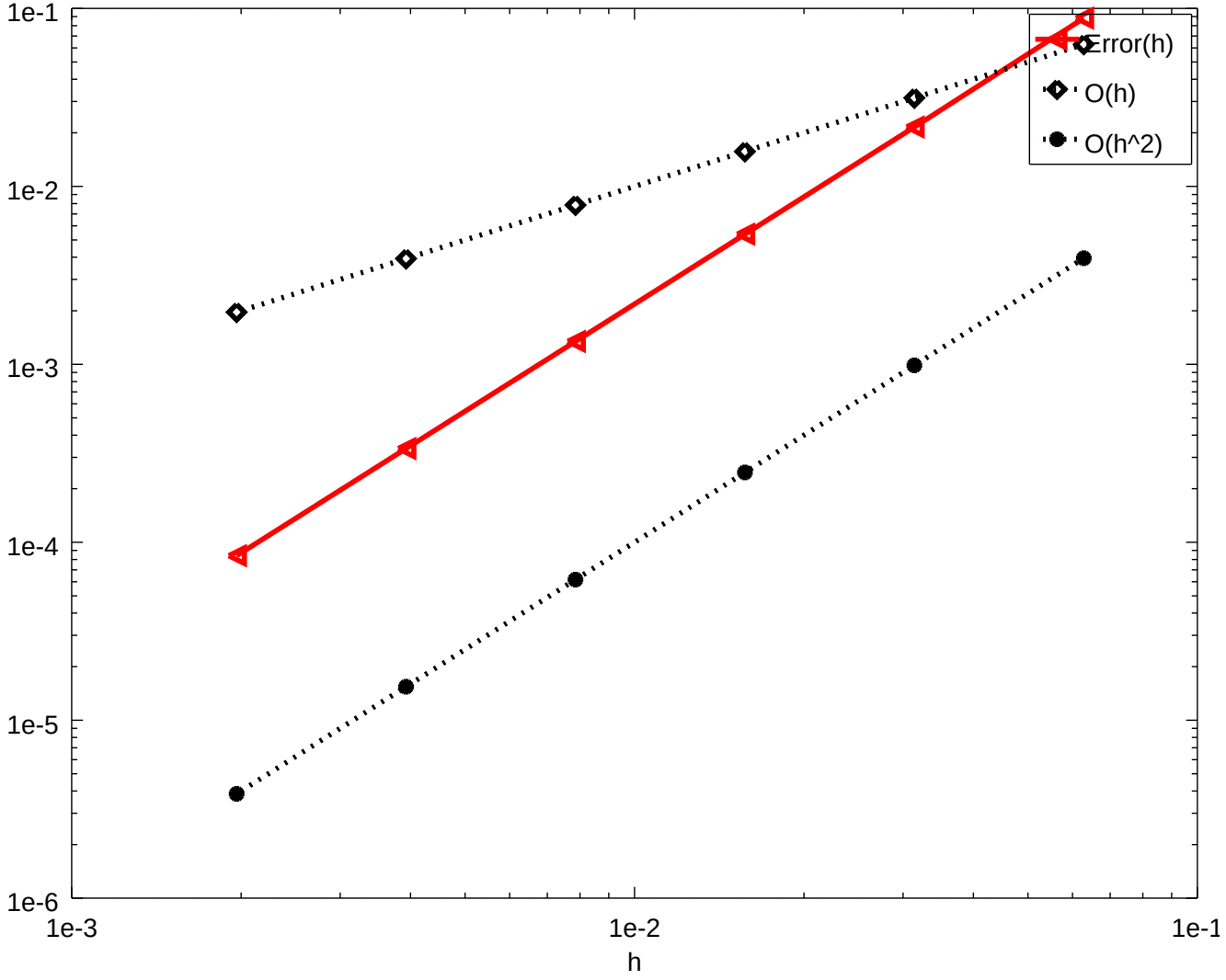


Figure : Représentation en échelle logarithmique

```
function M=AssembleMat1D(d,alpha,beta,gamma)
  M=sparse(d,d);
  M(1,1)=gamma;M(d,d)=gamma;
  for i=2:d-1
    M(i,i)=alpha;
    M(i,i-1)=beta;M(i,i+1)=beta;
  end
end
```

Listing 1 : fonction Matlab/Octave AssembleMat1D

```
function [x,U]=solveEDP1(a,b,c,alpha,beta,f,N)
  h=(b-a)/N;
  x=a:h:b;
  A=AssembleMat1D(N+1,2+c*h*h,-1,h*h);
  B=zeros(N+1,1);
  B(1)=alpha;B(N+1)=beta;
  for i=2:N
    B(i)=f(x(i));
  end
  B=h*h*B;
  U=A\B;
end
```

Listing 2 : fonction Matlab/Octave solveEDP1

```
clear all
close all
% Initialisation des donnees
uex=@(x) sin(x.^2);
c=1;
f=@(x) 4*x^2*sin(x^2) - 2*cos(x^2) + c*sin(x^2);
a=0;b=2*pi;
% Calcul des erreurs
LN=[100,200,400,800,1600,3200];
k=1;
for N=LN
  [x,U]=solveEDP1(a,b,c,uex(a),uex(b),f,N);
  H(k)=(b-a)/N;
  E(k)=max(abs(uex(x)'-U));
  k=k+1;
end
% Representation graphique
loglog(H,E,'r<-','LineWidth',2)
hold on
loglog(H,H,'kd:','LineWidth',2)
loglog(H,H.^2,'k*:','LineWidth',2)
legend('Error(h)','O(h)','O(h^2)')
xlabel('h')
```

Listing 3 : Script Matlab/Octave pour la représentation de l'ordre

1 Exemples d'E.D.P.
- Equation de Laplace/Poisson
- Equation de la chaleur
- Equation des ondes

2 Méthodes de résolution numérique d'EDP

3 Opérateurs aux différences finies
- Dimension 1
- Dimension $n > 1$

4 Méthode des différences finies 1D
- EDP stationnaire 1D + Dirichlet
- EDP stationnaire + CL mixtes

5 Problème modèle évolutif
- Schéma explicite
- Schéma implicite

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$
\begin{aligned}
-u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, && (4.42)\\
u(a) &= \alpha, && (4.43)\\
u'(b) &= \beta. && (4.44)
\end{aligned}
$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$
\begin{aligned}
-u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, && (4.42)\\
u(a) &= \alpha, && (4.43)\\
u'(b) &= \beta. && (4.44)
\end{aligned}
$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, && (4.42)\\ u(a) &= \alpha, && (4.43)\\ u'(b) &= \beta. && (4.44) \end{aligned}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

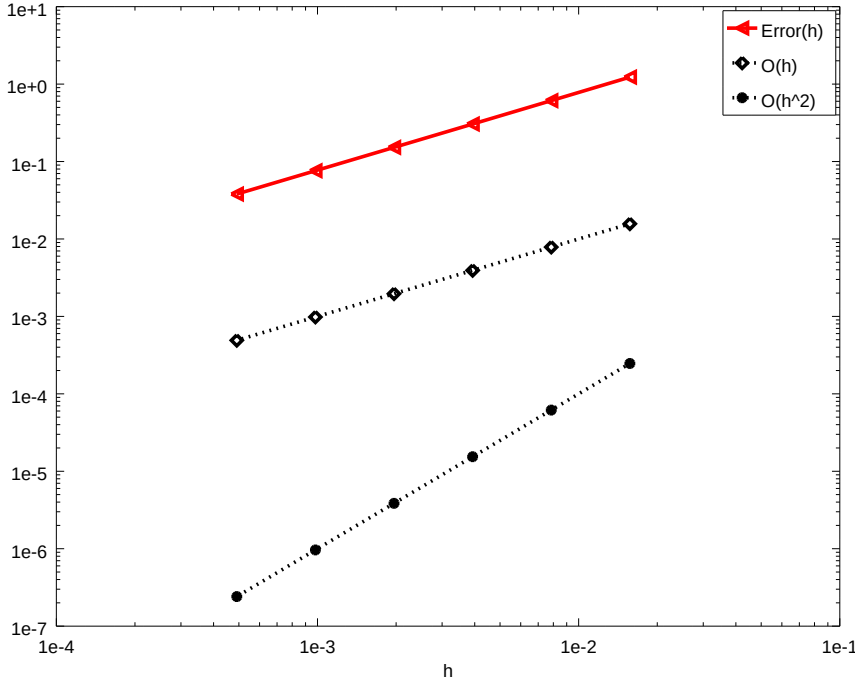
$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta. \tag{4.45}$$

$$
\begin{cases}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
u_N - u_{N-1} & = & h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{cases}
$$

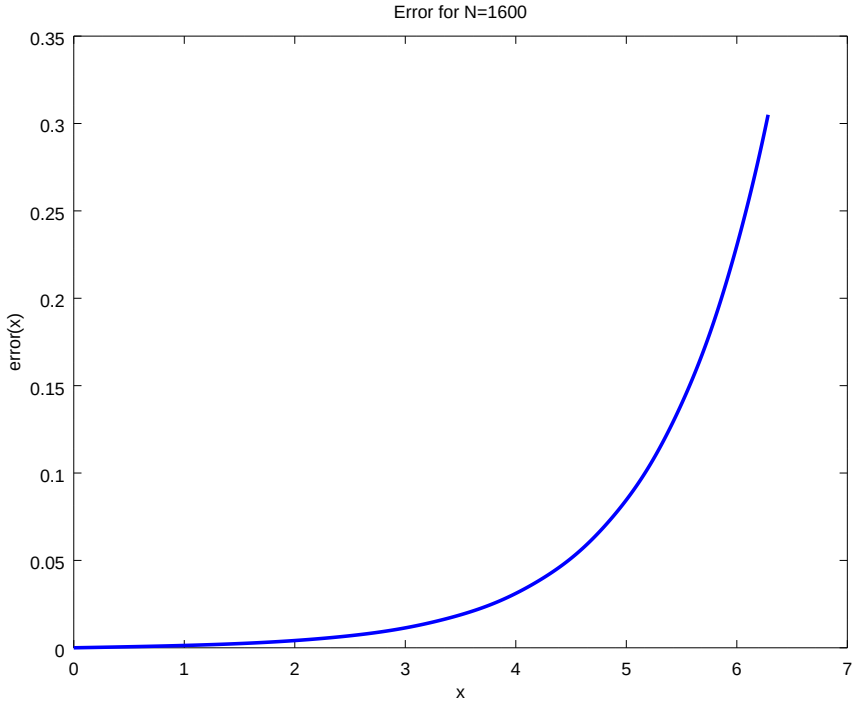
$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0 \\
\hline
u_1 \\
u_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
u_{N-2} \\
u_{N-1} \\
\hline
u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha \\
\hline
h^2 f(x_1) \\
h^2 f(x_2) \\
\vdots \\
\vdots \\
h^2 f(x_{N-2}) \\
h^2 f(x_{N-1}) \\
\hline
h\beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \quad (4.46)
$$

Mais ...

Schéma d'ordre 1 !!!



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Ecrire un schéma d'ordre 2 pour Neumann

Exercise 8.2

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q.1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4.47}$$

Q.2 *Montrer que*

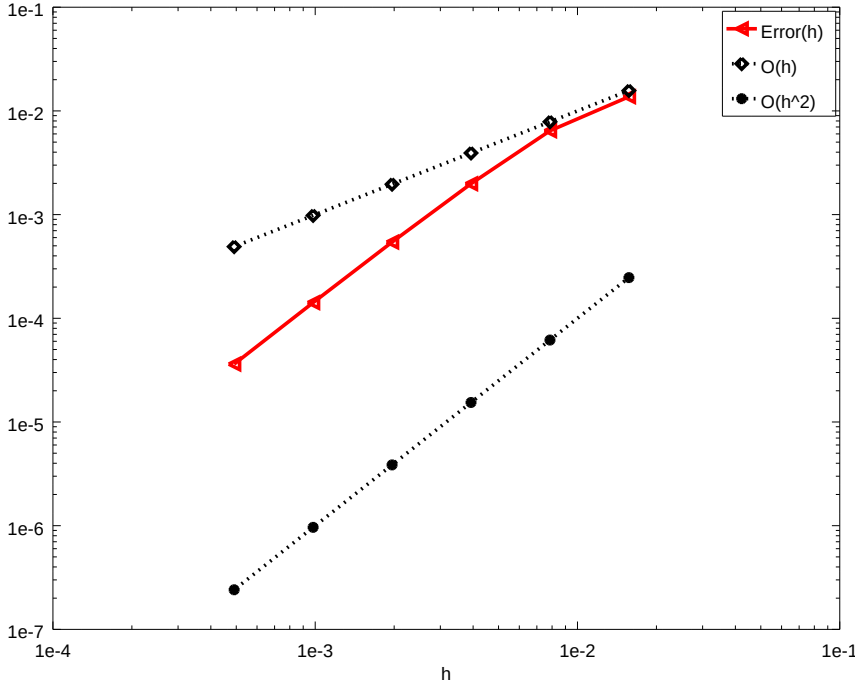
$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4.48}$$

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} & = & 2h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{array}
\right.
$$

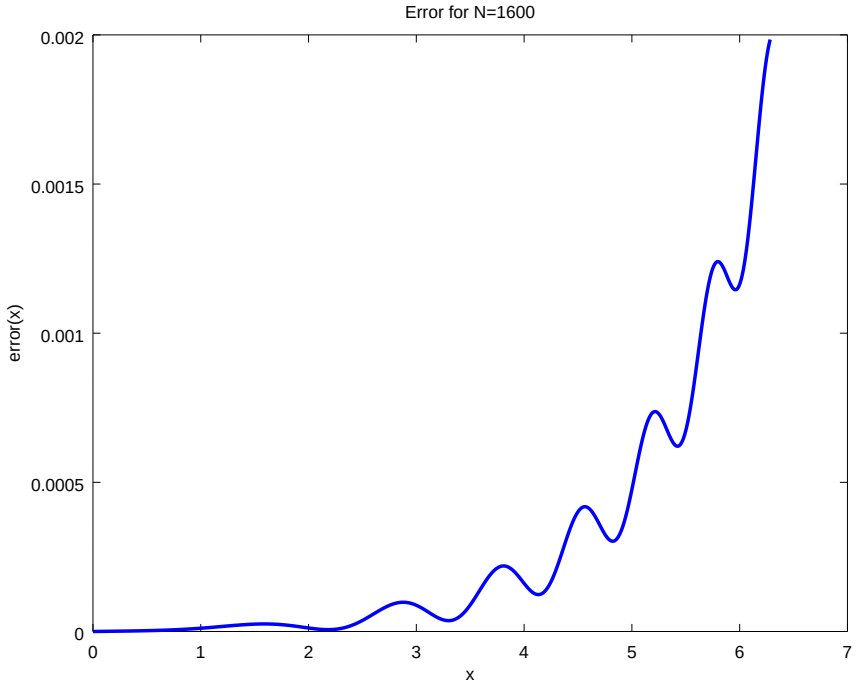
$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=}
\left(
\begin{array}{c|ccccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -4 & 3
\end{array}
\right)
\left(
\begin{array}{c}
u_0 \\
\hline
u_1 \\
u_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
u_{N-2} \\
u_{N-1} \\
\hline
u_N
\end{array}
\right)
=
\left(
\begin{array}{c}
\alpha \\
\hline
h^2 f(x_1) \\
h^2 f(x_2) \\
\vdots \\
\vdots \\
h^2 f(x_{N-2}) \\
h^2 f(x_{N-1}) \\
\hline
2h\beta
\end{array}
\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \quad (4.54)
$$

et ...

Schéma d'ordre 2



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Exercise 8.3

Soit le problème suivant

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, && (4.55)\\
u'(a) &= \alpha, && (4.56)\\
u(b) &= \beta. && (4.57)
\end{aligned}
$$

où c est une fonction positive.

Q.1

1. *Quelles sont les données du problème (4.55)-(4.57)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
2. *Quelles sont les inconnues du problème (4.55)-(4.57)? (préciser le type)*
3. *Quelles sont les conditions initiales?*
4. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q.2 *Construire une discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.* On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (4.55) à l'aide du schéma numérique

$$
-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{4.58}
$$

Q.3

1. *Expliquer comment le schéma (4.58) a été obtenu à partir de (4.55) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*
2. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (4.55).*
3. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*
4. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q.4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{4.59}
$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).

Q.5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (4.55) à (4.57) basé sur (4.59). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow \textsc{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*

Plan

1. Exemples d'E.D.P.
   - Equation de Laplace/Poisson
   - Equation de la chaleur
   - Equation des ondes
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
   - Dimension 1
   - Dimension $n > 1$
4. Méthode des différences finies 1D
   - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
   - EDP stationnaire + CL mixtes
5. Problème modèle évolutif
   - Schéma explicite
   - Schéma implicite

1. Exemples d'E.D.P.
   - Equation de Laplace/Poisson
   - Equation de la chaleur
   - Equation des ondes
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
   - Dimension 1
   - Dimension $n > 1$
4. Méthode des différences finies 1D
   - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
   - EDP stationnaire + CL mixtes
5. Problème modèle évolutif
   - Schéma explicite
   - Schéma implicite

EDP modèle instationnaire en dimension 1 : équation de la chaleur

Trouver $u : [0, T] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x), \qquad \forall (t,x) \in]0,T] \times]a,b[, \quad (4.76)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \forall x \in [a,b] \quad (4.77)$$

$$-D\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = \alpha(t), \qquad \forall t \in [0,T] \quad (4.78)$$

$$u(t,b) = \beta(t), \qquad \forall t \in [0,T] \quad (4.79)$$

où $a < b$, $D > 0$ (coefficient de diffusivité), $\alpha : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\beta : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : [0, T] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.

condition de compatibilité :

$$u_0(b) = \beta(0). \quad (4.80)$$

$$x_i = a + i\Delta_x, \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \qquad \text{avec } \Delta_x = (b-a)/N_x$$
$$t^n = n\Delta_t, \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!], \qquad \text{avec } \Delta_t = T/N_t.$$

Objectif: Trouver $\boldsymbol{u}_i^n \approx u(t^n, x_i)$, $\forall n \in [\![0, N_t]\!]$, $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$

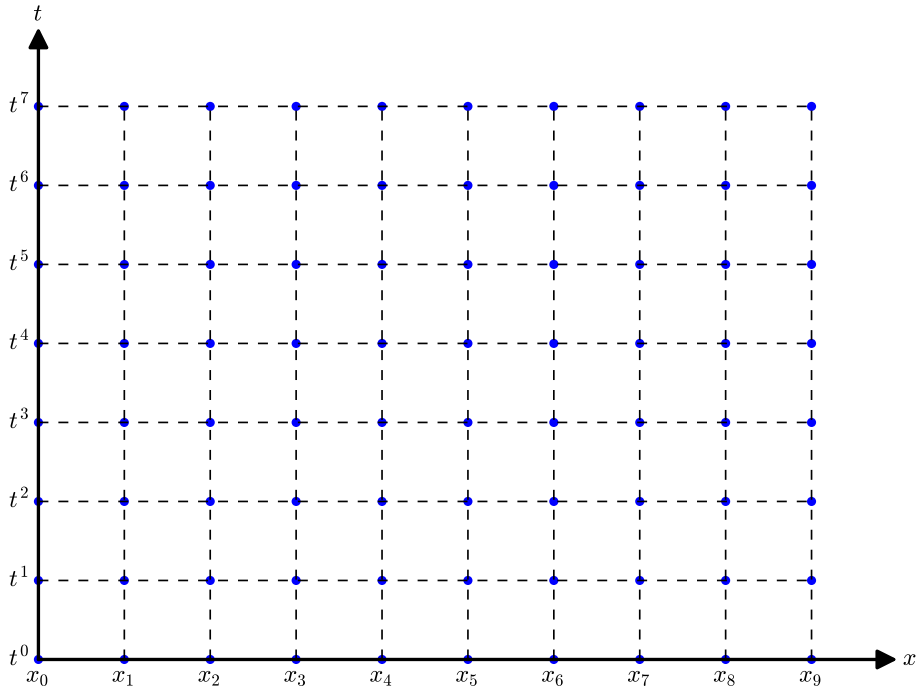


Figure : Représentation d'une grille espace-temps avec $N_t = 7$ et $N_x = 9$. Les noeuds de la grille sont les points bleus.

EDP modèle d'évolution en dimension 1 : équation de la chaleur, formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(t^n, x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in [\![0, N_t]\!]$, $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$, tels que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i) = f(t^n, x_i), \tag{4.81}$$

$$u(t^0, x_i) = u_0(x_i), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \tag{4.82}$$

$$-D\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_0) = \alpha(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.83}$$

$$u(t^n, x_{N_x}) = \beta(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.84}$$

$\Longrightarrow$ il nous faut maintenant discrétiser les opérateurs de dérivation

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}$$

On déduit des développements de Taylor :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Avec $h = \Delta_x$ on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i) = \frac{u(t^n, x_{i+1}) - 2u(t^n, x_i) + u(t^n, x_{i-1})}{\Delta_x^2} + \mathcal{O}(\Delta_x^2) \qquad (4.85)$$

On déduit des développements de Taylor :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{u(t,x)-u(t-h,x)}{h} + \mathcal{O}(h).
\end{aligned}$$

Avec $h = \Delta_t$ on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n,x_i) = \frac{u(t^{n+1},x_i)-u(t^n,x_i)}{\Delta_t} + \mathcal{O}(\Delta_t) \tag{4.86}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n,x_i) = \frac{u(t^n,x_i)-u(t^{n-1},x_i)}{\Delta_t} + \mathcal{O}(\Delta_t). \tag{4.87}$$

On déduit des développements de Taylor :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{u(t,x+h)-u(t,x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{u(t,x)-u(t,x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{u(t,x+h)-u(t,x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{-3u(t,x)+4u(t,x+h)-u(t,x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{3u(t,x)-4u(t,x-h)+u(t,x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

On veut approcher $\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_0)$ à l'ordre 2! $\Rightarrow$ 4ème approximation.
Avec $h = \Delta_x$ on obtient

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_0) = \frac{-3u(t^n,x_0)+4u(t^n,x_1)-u(t^n,x_2)}{2\Delta_x} + \mathcal{O}(\Delta_x^2) \qquad (4.88)
$$

1 Exemples d'E.D.P.
- Equation de Laplace/Poisson
- Equation de la chaleur
- Equation des ondes

2 Méthodes de résolution numérique d'EDP

3 Opérateurs aux différences finies
- Dimension 1
- Dimension $n > 1$

4 Méthode des différences finies 1D
- EDP stationnaire 1D + Dirichlet
- EDP stationnaire + CL mixtes

5 Problème modèle évolutif
- Schéma explicite
- Schéma implicite

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

On rappelle (54)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i) = f(t^n, x_i), \quad \forall n \in]\!]0, N_t]\!], \ \forall i \in]\!]0, N_x[\![,$$

qui devient avec (4.86) et (4.85)

$$\begin{aligned} &\frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta_t} + \mathcal{O}(\Delta_t) \\ -D&\frac{u(t^n, x_{i+1}) - 2u(t^n, x_i) + u(t^n, x_{i-1})}{\Delta_x^2} + \mathcal{O}(\Delta_x^2) = f(t^n, x_i) \end{aligned} \tag{4.94}$$

avec $n \in [\![0, N_t[\![$ et $i \in]\!]0, N_x[\![$.
En utilisant (4.87) en lieu et place de (4.86) on obtient un schéma implicite...

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

Un schéma numérique d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace pour (54):
$\forall n \in [\![0, N_t[\![,\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![$

$$\frac{\boldsymbol{u}_i^{n+1} - \boldsymbol{u}_i^n}{\Delta_t} - D\frac{\boldsymbol{u}_{i+1}^n - 2\boldsymbol{u}_i^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n}{\Delta_x^2} = \boldsymbol{f}_i^n \tag{4.95}$$

avec $\boldsymbol{f}_i^n = f(t^n, x_i)$ et (en espérant) $\boldsymbol{u}_i^n \approx u(t^n, x_i)$.
(4.95) est équivalent à

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = \boldsymbol{u}_i^n + D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}\left(\boldsymbol{u}_{i+1}^n - 2\boldsymbol{u}_i^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n\right) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n \tag{4.96}$$

Et (4.82), (4.83), (4.84)?

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

On rappelle respectivement (4.82) et (4.84):

$$\begin{aligned} u(t^0, x_i) &= u_0(x_i), && \forall i \in [\![0, N_x]\!] \\ u(t^n, x_{N_x}) &= \beta(t^n), && \forall n \in [\![0, N_t]\!] \end{aligned}$$

qui donne immédiatement (sans approximation)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_i^0 &= u_0(x_i), && \forall i \in [\![0, N_x]\!] \\ \boldsymbol{u}_{N_x}^n &= \beta(t^n), && \forall n \in [\![0, N_t]\!] \end{aligned} \tag{4.97}$$

Et (4.83)?

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

On rappelle (4.83) $\forall n \in [\![0, N_t]\!]$

$$-D\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_0) = \alpha(t^n)$$

qui donne avec (4.88)

$$-D\frac{-3u(t^n, x_0) + 4u(t^n, x_1) - u(t^n, x_2)}{2\Delta_x} + \mathcal{O}(\Delta_x^2) = \alpha(t^n)$$

Un schéma numérique d'ordre 2 en espace pour (4.83):

$$-D\frac{-3\boldsymbol{u}_0^n + 4\boldsymbol{u}_1^n - \boldsymbol{u}_2^n}{\Delta_x} = \alpha(t^n)$$

ou encore

$$\boldsymbol{u}_0^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta_x}{D}\alpha(t^n) + 4\boldsymbol{u}_1^n - \boldsymbol{u}_2^n\right). \tag{4.105}$$

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

En résumé, avec $E = D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$ et $C = 1 - 2E$

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \qquad \begin{cases} \forall n \in [\![0, N_t[\![, \\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![\end{cases} \tag{4.96}$$

$$\boldsymbol{u}_i^0 = u_0(x_i), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!] \tag{4.106}$$

$$\boldsymbol{u}_0^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta_x}{D}\alpha(t^n) + 4\boldsymbol{u}_1^n - \boldsymbol{u}_2^n\right), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.105}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^n = \beta(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.97}$$

Peut-on calculer $(\boldsymbol{u}_i^{n+1})_{i=0}^{N_x}$ connaissant $(\boldsymbol{u}_i^n)_{i=0}^{N_x}$?

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = \tag{4.107}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^{n+1} = \tag{4.108}$$

$$\boldsymbol{u}_0^{n+1} = \tag{4.109}$$

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

En résumé, avec $E = D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$ et $C = 1 - 2E$

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \qquad \begin{cases} \forall n \in [\![0, N_t[\![, \\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![\end{cases} \tag{4.96}$$

$$\boldsymbol{u}_i^0 = u_0(x_i), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!] \tag{4.106}$$

$$\boldsymbol{u}_0^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta_x}{D}\alpha(t^n) + 4\boldsymbol{u}_1^n - \boldsymbol{u}_2^n\right), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.105}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^n = \beta(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.97}$$

Peut-on calculer $(\boldsymbol{u}_i^{n+1})_{i=0}^{N_x}$ connaissant $(\boldsymbol{u}_i^n)_{i=0}^{N_x}$?

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \ \forall i \in]\!]0, N_x[\![, \tag{4.107}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^{n+1} = \tag{4.108}$$

$$\boldsymbol{u}_0^{n+1} = \tag{4.109}$$

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

En résumé, avec $E = D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$ et $C = 1 - 2E$

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \qquad \begin{cases} \forall n \in [\![0, N_t[\![, \\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![\end{cases} \tag{4.96}$$

$$\boldsymbol{u}_i^0 = u_0(x_i), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!] \tag{4.106}$$

$$\boldsymbol{u}_0^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta_x}{D}\alpha(t^n) + 4\boldsymbol{u}_1^n - \boldsymbol{u}_2^n\right), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.105}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^n = \beta(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.97}$$

Peut-on calculer $(\boldsymbol{u}_i^{n+1})_{i=0}^{N_x}$ connaissant $(\boldsymbol{u}_i^n)_{i=0}^{N_x}$?

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \ \forall i \in]\!]0, N_x[\![, \tag{4.107}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^{n+1} = \beta(t^{n+1}), \tag{4.108}$$

$$\boldsymbol{u}_0^{n+1} = \tag{4.109}$$

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

En résumé, avec $E = D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$ et $C = 1 - 2E$

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \qquad \begin{cases} \forall n \in [\![0, N_t[\![, \\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![\end{cases} \tag{4.96}$$

$$\boldsymbol{u}_i^0 = u_0(x_i), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!] \tag{4.106}$$

$$\boldsymbol{u}_0^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta_x}{D}\alpha(t^n) + 4\boldsymbol{u}_1^n - \boldsymbol{u}_2^n\right), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.105}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^n = \beta(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.97}$$

Peut-on calculer $(\boldsymbol{u}_i^{n+1})_{i=0}^{N_x}$ connaissant $(\boldsymbol{u}_i^n)_{i=0}^{N_x}$?

$$\boldsymbol{u}_i^{n+1} = C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \ \forall i \in]\!]0, N_x[\![, \tag{4.107}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^{n+1} = \beta(t^{n+1}), \tag{4.108}$$

$$\boldsymbol{u}_0^{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta_x}{D}\alpha(t^{n+1}) + 4\boldsymbol{u}_1^{n+1} - \boldsymbol{u}_2^{n+1}\right). \tag{4.109}$$

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

L'algorithme formel est donc le suivant :

1: $\boldsymbol{u}_i^0 \leftarrow u_0(x_i),\ \forall i \in [\![0, N_x]\!]$
2: **Pour** $n \leftarrow 0$ **à** $N_t - 1$ **faire**
3: $\quad \boldsymbol{u}_i^{n+1} \leftarrow C\boldsymbol{u}_i^n + E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n,\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![$
4: $\quad \boldsymbol{u}_{N_x}^{n+1} \leftarrow \beta(t^{n+1})$
5: $\quad \boldsymbol{u}_0^{n+1} \leftarrow \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta_x}{D}\alpha(t^{n+1}) + 4\boldsymbol{u}_1^{n+1} - \boldsymbol{u}_2^{n+1}\right)$
6: **Fin Pour**

Exercise 9.1

Q.1 *Ecrire une fonction algorithmique* HEAT1DEX *permettant de retourner la discrétisation en temps, la discrétisation en espace et l'ensemble des* $\boldsymbol{u}_i^n$, $i \in [\![0, N_x]\!]$, $n \in [\![1, N_t]\!]$ *calculés par le schéma explicite en temps pour l'EDP* (54) *à* (4.84).

Q.2 *Ecrire un programme utilisant cette fonction et permettant de calculer la solution numérique d'un problème dont on connait la solution exacte.*

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

Données :	a, b	:	deux réels $a < b$,
	T	:	$T > 0$,
	D	:	D réel strictement positif, (coefficient de diffusivité)
	f	:	$f : [0, T] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
	u_0	:	$u_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
	α	:	$\alpha : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$,
	β	:	$\beta : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $\beta(0) = u_0(b)$,
	N_x	:	$N_x \in \mathbb{N}^*$, nombre de discrétisation en espace,
	N_t	:	$N_t \in \mathbb{N}^*$, nombre de discrétisation en temps.

Schéma explicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

Résultat : $\mathbb{U}$: tableau 2D/matrice $(N_x+1)\times(N_t+1)$ de réels tel que $\mathbb{U}(i+1,n+1)=\boldsymbol{u}_i^n$, $\forall i\in[\![0,N_x]\!]$, $\forall n\in[\![0,N_t]\!]$.

colonnes

lignes	1	2	3		N_t-1	N_t	N_t+1
1	$\mathbf{u}_0^0$	$\mathbf{u}_0^1$	$\mathbf{u}_0^2$		$\mathbf{u}_0^{N_t-2}$	$\mathbf{u}_0^{N_t-1}$	$\mathbf{u}_0^{N_t}$
2	$\mathbf{u}_1^0$	$\mathbf{u}_1^1$	$\mathbf{u}_1^2$		$\mathbf{u}_1^{N_t-2}$	$\mathbf{u}_1^{N_t-1}$	$\mathbf{u}_1^{N_t}$
3	$\mathbf{u}_2^0$	$\mathbf{u}_2^1$	$\mathbf{u}_2^2$		$\mathbf{u}_2^{N_t-2}$	$\mathbf{u}_2^{N_t-1}$	$\mathbf{u}_2^{N_t}$
N_x	$\mathbf{u}_{N_x-1}^0$	$\mathbf{u}_{N_x-1}^1$	$\mathbf{u}_{N_x-1}^2$		$\mathbf{u}_{Nx-1}^{N_t-2}$	$\mathbf{u}_{Nx-1}^{N_t-1}$	$\mathbf{u}_{Nx-1}^{N_t}$
N_x+1	$\mathbf{u}_{N_x}^0$	$\mathbf{u}_{N_x}^1$	$\mathbf{u}_{N_x}^2$		$\mathbf{u}_{Nx}^{N_t-2}$	$\mathbf{u}_{Nx}^{N_t-1}$	$\mathbf{u}_{Nx}^{N_t}$

Algorithme 1 Fonction HEAT1DEX (version non vectorisée)

```
Fonction [t, x, U] ← HEAT1DEX ( a, b, T, D, f, u_0, α, β, N_x, N_t )
    t ← DISREG(0, T, N_t)
    Δ_t ← T/N_t
    x ← DISREG(a, b, N_x)
    Δ_x ← (b − a)/N_x
    E ← D Δ_t/Δ_x^2, C ← 1 − 2E
    Pour i ← 1 à N_x + 1 faire                                  ▷ Condition initiale
        U(i, 1) ← u_0(x(i))
    Fin Pour
    Pour n ← 1 à N_t faire                                      ▷ Boucle en temps
        Pour i ← 2 à N_x faire                                  ▷ Schéma
            U(i, n+1) ← C∗U(i, n)+E∗(U(i+1, n)+U(i−1, n))+Δ_t∗f(t(n), x(i))
        Fin Pour
        U(N_x, n + 1) ← β(t(n + 1))
        U(1, n + 1) ← (Δ_x/D ∗ α(t(n + 1)) + 4U(2, n + 1) − U(3, n + 1))/3
    Fin Pour
Fin Fonction
```

Algorithme 2 Fonction HEAT1DEX (version vectorisée)

1: **Fonction** $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \mathbb{U}] \leftarrow$ HEAT1DEX $(a, b, T, D, f, u_0, \alpha, \beta, N_x, N_t)$
2: $\boldsymbol{t} \leftarrow$ DISREG$(0, T, N_t)$, $\Delta_t \leftarrow T/N_t$
3: $\boldsymbol{x} \leftarrow$ DISREG(a, b, N_x), $\Delta_x \leftarrow (b-a)/N_x$
4: $E \leftarrow D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$, $C \leftarrow 1 - 2E$
5: $\mathbb{U}(:, 1) \leftarrow u_0(\boldsymbol{x})$ ▷ Condition initiale
6: $\boldsymbol{I} \leftarrow [2 : N_x]$ ▷ Indices des points intérieurs
7: **Pour** $n \leftarrow 1$ **à** N_t **faire** ▷ Boucle en temps
8: $\mathbb{U}(\boldsymbol{I}, n+1) \leftarrow C * \mathbb{U}(\boldsymbol{I}, n) - E * (\mathbb{U}(\boldsymbol{I}+1, n) + \mathbb{U}(\boldsymbol{I}-1, n)) + \Delta_t * f(\boldsymbol{t}(n), \boldsymbol{x}(\boldsymbol{I}))$
9: $\mathbb{U}(N_x, n+1) \leftarrow \beta(\boldsymbol{t}(n+1))$
10: $\mathbb{U}(1, n+1) \leftarrow (\frac{\Delta_x}{D} * \alpha(\boldsymbol{t}(n+1)) + 4\mathbb{U}(2, n+1) - \mathbb{U}(3, n+1))/3$
11: **Fin Pour**
12: **Fin Fonction**

```
function [t,x,U]=Heat1DexLight(a,b,T,D,f,u0,alpha,beta,Nx,Nt)
  dt=T/Nt;      t=0:dt:T;
  dx=(b-a)/Nx;  x=[a:dx:b]';
  U=zeros(Nx+1,Nt+1);
  E=D*dt/dx^2;C=1-2*E;
  I=2:Nx;
  U(:,1)=u0(x);
  for n=1:Nt
    U(I,n+1)=C*U(I,n) + E*(U(I+1,n)+U(I-1,n)) + ...
        dt*f(t(n),x(I));
    U(Nx+1,n+1)=beta(t(n+1));
    U(1,n+1)=((2*dx/D)*alpha(t(n+1)) + 4*U(2,n+1) - ...
        U(3,n+1))/3;
  end
end
```

Listing 4 : fonction pour la résolution de l'EDP de la chaleur (54)-(4.84) par le schéma **explicite** (4.107)-(4.109)

Application avec solution exacte

On choisi

$$u(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} cos(t)cos(x)$$

et en injectant dans l'EDP on obtient

$$\begin{aligned} f(t,x) &\stackrel{\text{def}}{=} D\cos(t)\cos(x) - \sin(t)\cos(x), \\ u_0(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \cos(x), \\ \alpha(t) &\stackrel{\text{def}}{=} D\cos(t)\sin(a), \\ \beta(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \cos(t)\cos(b). \end{aligned}$$

Calcul numérique avec

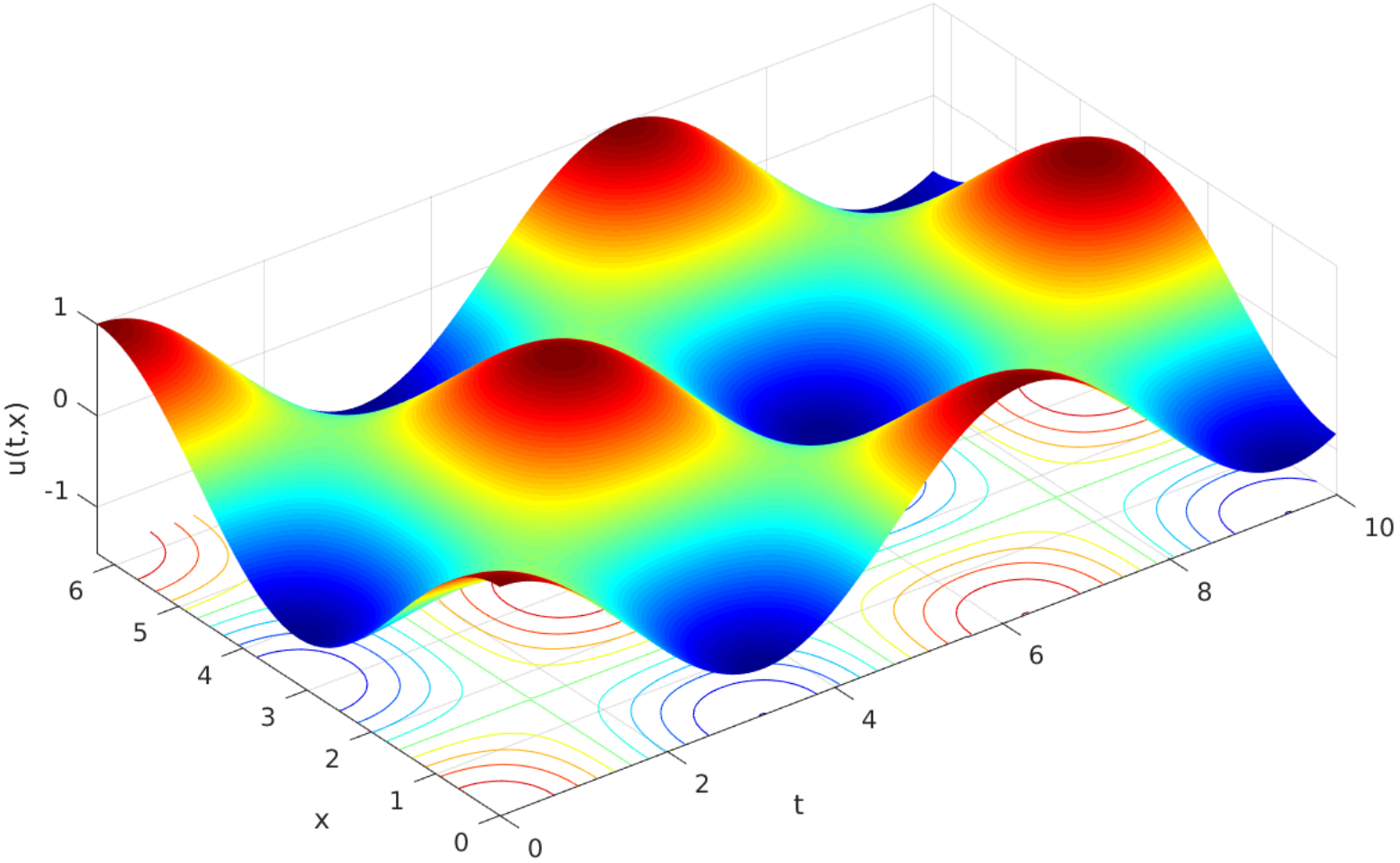
$$D = 1,\ a = 0,\ b = 2\pi,\ T = 10,\ N_x = 50 \text{ et } N_t = 5000$$

Application avec solution exacte: numerical solution $N_x = 50$

```
a=0;b=2*pi;Nx=50;
T=10;Nt=5000
D=1;
u=@(t,x) cos(t).*cos(x); % solution exacte
f=@(t,x) D*cos(t).*cos(x) - sin(t).*cos(x);
beta=@(t) u(t,b);
alpha=@(t)  D*cos(t).*sin(a);
u0=@(x) cos(x);
[t,x,U]=Heat1DexLight(a,b,T,D,f,u0,alpha,beta,Nx,Nt);
surfc(t,x,U)
xlabel('t'),ylabel('x'),zlabel('u(t,x)')
shading interp, colormap(jet)
axis image
```

Listing 5 : Equation de la chaleur 1D avec solution exacte. Représentation de la solution calculée. : code Matlab

Application avec solution exacte: numerical solution $N_x = 50$

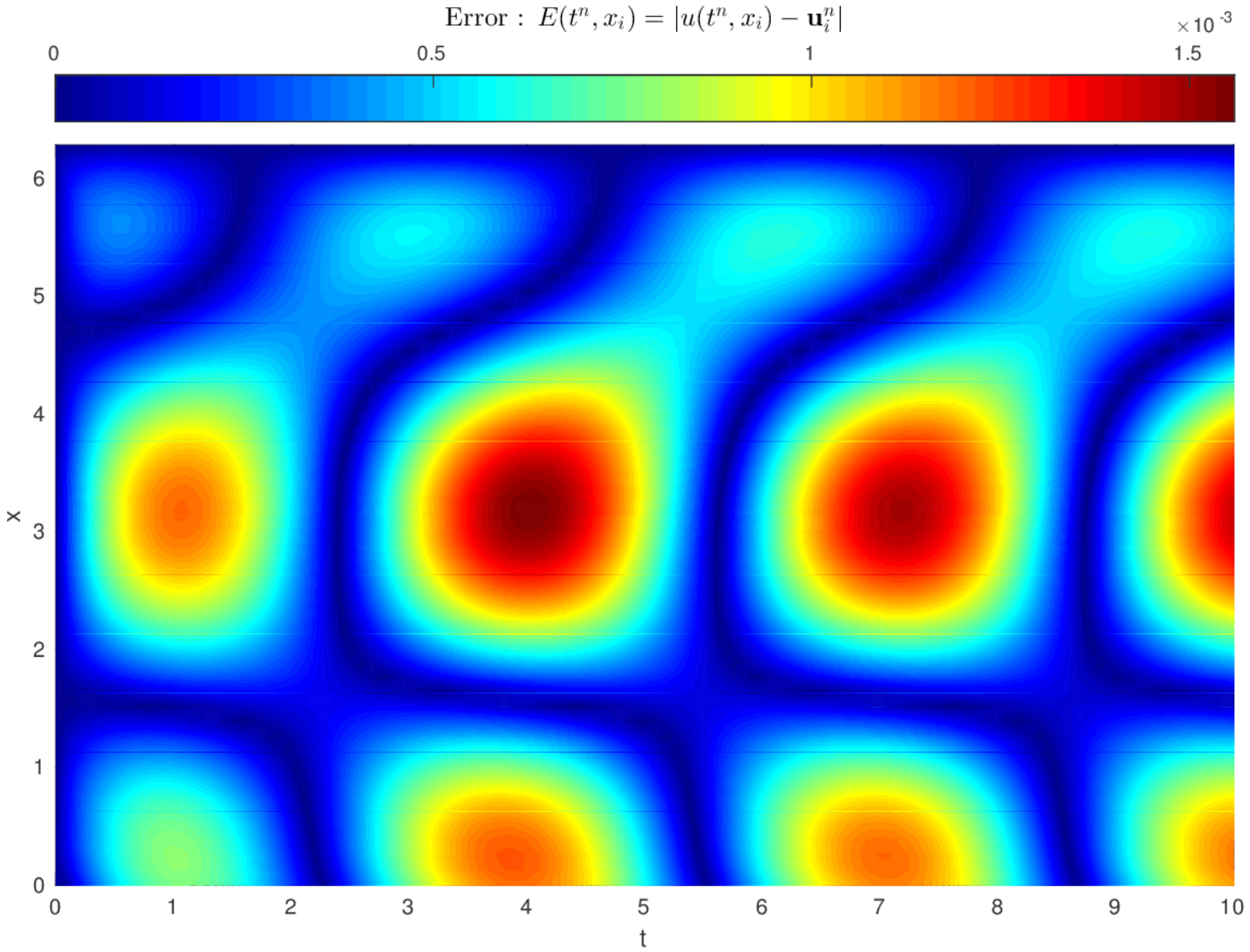


Application avec solution exacte: error $_{N_x = 50}$

```
[T,X]=meshgrid(t,x);
Uex=u(T,X);
figure(2)
pcolor(t,x,abs(U-Uex))
xlabel('t'),ylabel('x')
shading interp, colormap(jet)
axis image
h=colorbar('Location','northoutside');
set(get(h,'title'),'string','Error␣:␣...
    $E(t^n,x_i)=|u(t^n,x_i)-\mathbf{u}_i^n|$', ...
     'interpreter','latex','fontsize',12)
```

Listing 6 : Equation de la chaleur 1D avec solution exacte. Représentation de l'erreur : code Matlab

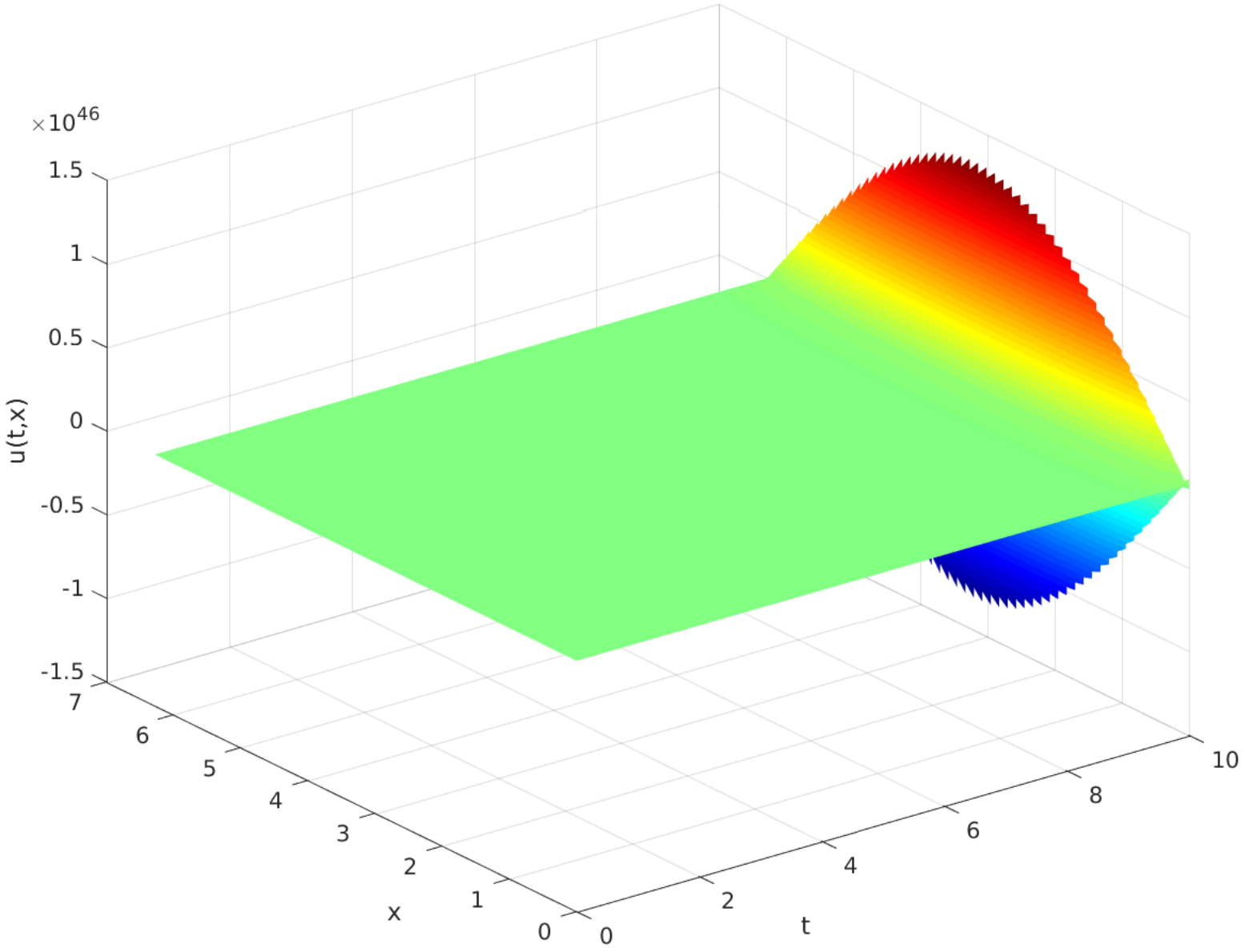
Application avec solution exacte: error $N_x = 50$



Application avec solution exacte: numerical solution $N_x = 100$

On change uniquement N_x : $50 \rightarrow 100$!
A quoi peut-on s'attendre?

Application avec solution exacte: numerical solution $N_x = 100$



Application avec solution exacte: Phénomène d'instabilité

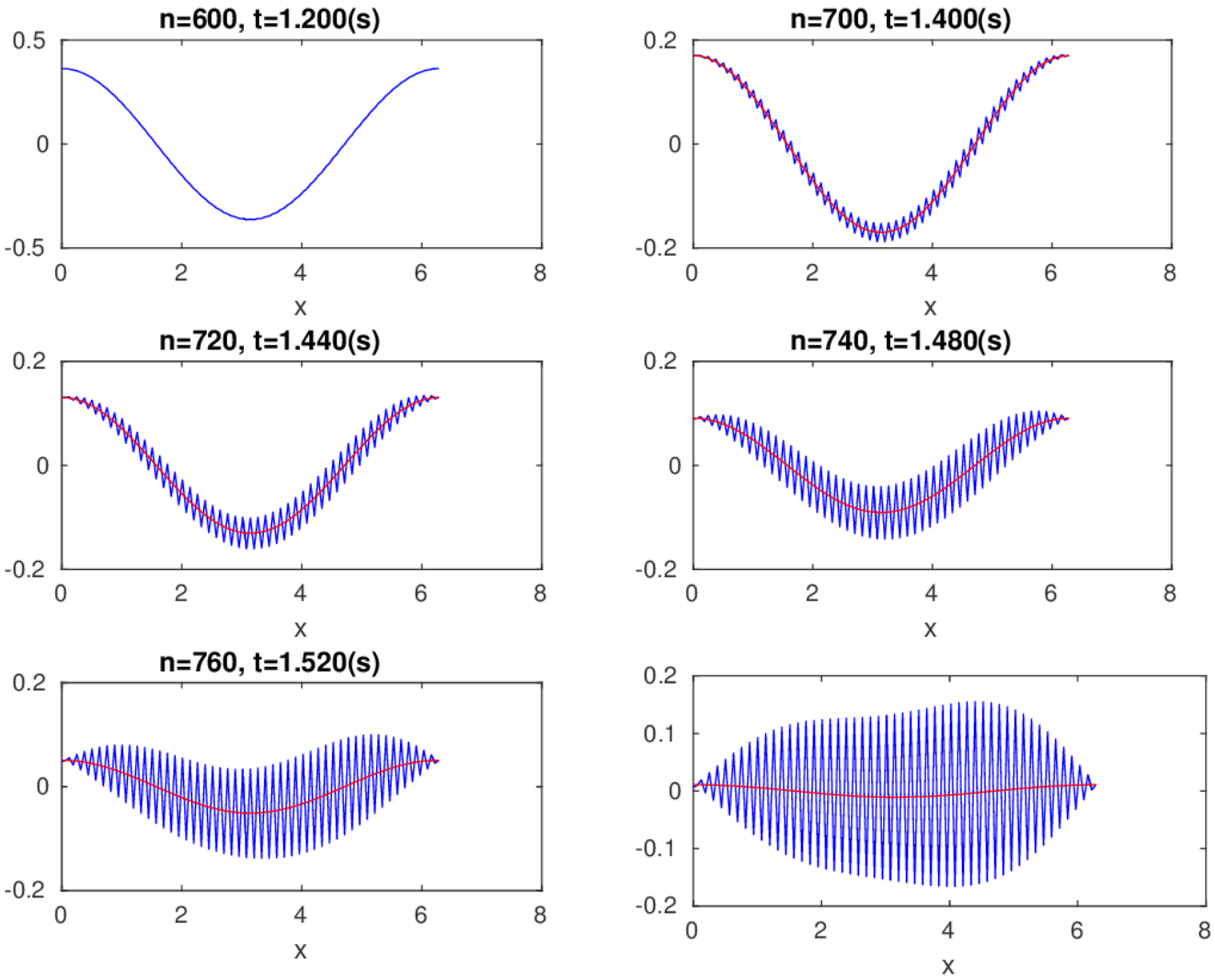


Figure : Equation de la chaleur 1D avec solution exacte (en rouge). Debut du phénomène d'instabilité.

Application avec solution exacte: Phénomène d'instabilité

Etude de la stabilité au sens de Von Neumann du schéma explicite donne la **condition de C.F.L.** (R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy en 1928): le schéma est stable si

$$D\frac{\Delta_t}{dx^2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.110}$$

Illustration: représenter en échelle logarithmique l'erreur commise en fonction de Δ_x et Δ_t calculée par

$$E(\Delta_x, \Delta_t) = \max_{i\in[\![0,N_x]\!],n\in[\![0,N_t]\!]} |\boldsymbol{u}_i^n - u_{\mathrm{ex}}(t^n, x_i)|$$

où u_{ex} est la solution exacte.

Application avec solution exacte: Phénomène d'instabilité

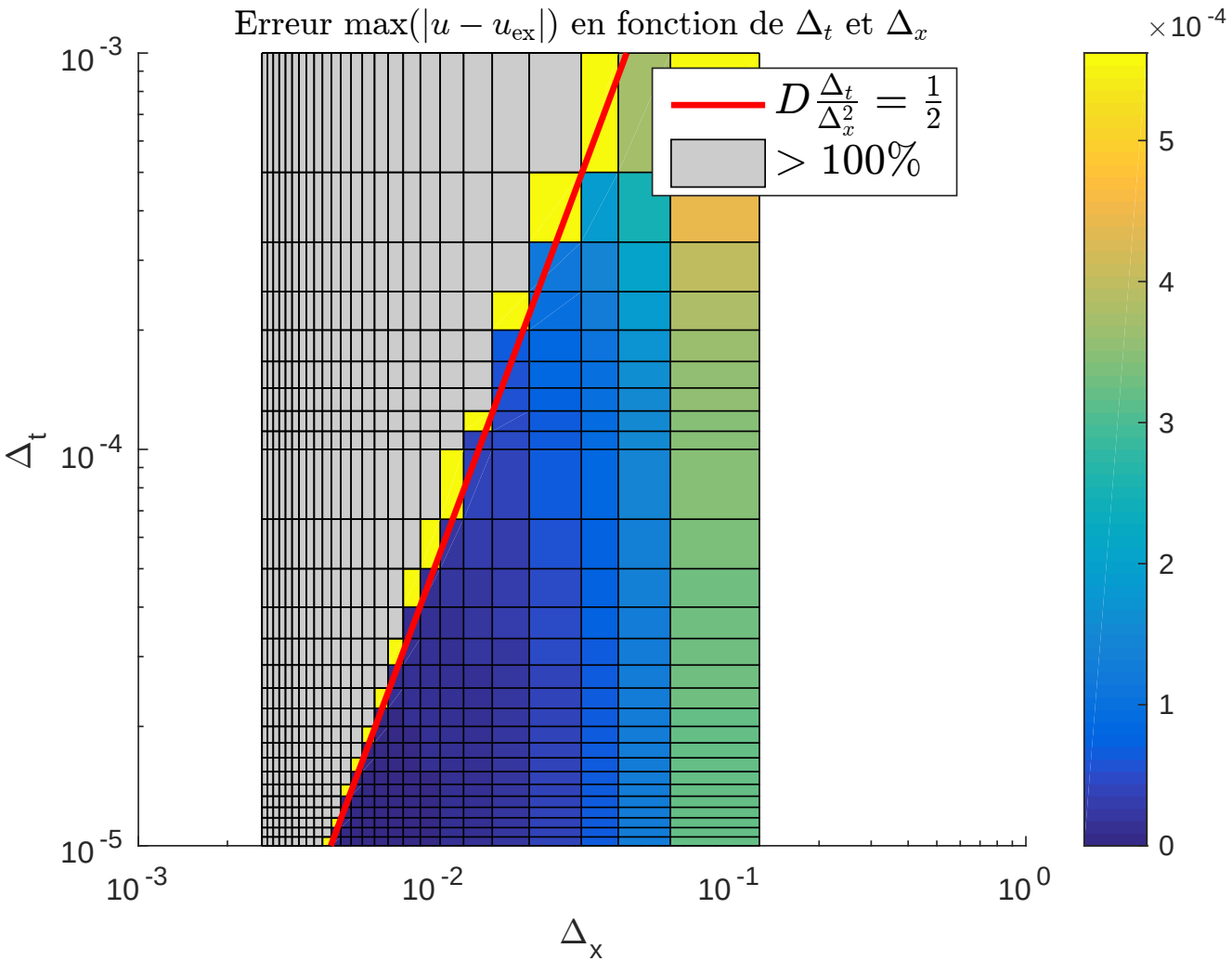


Figure : Equation de la chaleur 1D avec solution exacte. Condition de CFL.

1. Exemples d'E.D.P.
   - Equation de Laplace/Poisson
   - Equation de la chaleur
   - Equation des ondes
2. Méthodes de résolution numérique d'EDP
3. Opérateurs aux différences finies
   - Dimension 1
   - Dimension $n > 1$
4. Méthode des différences finies 1D
   - EDP stationnaire 1D + Dirichlet
   - EDP stationnaire + CL mixtes
5. Problème modèle évolutif
   - Schéma explicite
   - Schéma implicite

EDP modèle d'évolution en dimension 1 : équation de la chaleur, formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(t^n, x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in [\![0, N_t]\!]$, $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$, tels que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i) = f(t^n, x_i), \tag{54}$$

$$u(t^0, x_i) = u_0(x_i), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \tag{4.82}$$

$$-D\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_0) = \alpha(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.83}$$

$$u(t^n, x_{N_x}) = \beta(t^n), \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!] \tag{4.84}$$

Pour approcher $\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i)$, on utilise cette fois

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) = \frac{u(t^n, x_i) - u(t^{n-1}, x_i)}{\Delta_t} + \mathcal{O}(\Delta_t). \tag{4.87}$$

Schéma implicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

Un schéma numérique d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace pour (54):
$\forall n \in]\!]0, N_t]\!],\ \forall i \in]\!]0, N_x[\![$

$$\frac{\boldsymbol{u}_i^n - \boldsymbol{u}_i^{n-1}}{\Delta_t} - D\frac{\boldsymbol{u}_{i+1}^n - 2\boldsymbol{u}_i^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n}{\Delta_x^2} = \boldsymbol{f}_i^n, \tag{4.113}$$

avec $\boldsymbol{f}_i^n = f(t^n, x_i)$ et (en espérant) $\boldsymbol{u}_i^n \approx u(t^n, x_i)$.
(4.116) est équivalent à

$$\boldsymbol{u}_i^n - D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}\left(\boldsymbol{u}_{i+1}^n - 2\boldsymbol{u}_i^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n\right) = \boldsymbol{u}_i^{n-1} + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n. \tag{4.114}$$

Ce schéma est **implicite en temps** : il n'est pas possible de calculer explicitement $\boldsymbol{u}_i^n$ en fonction des $\boldsymbol{u}_i^{n-1}$ (au temps précédent).

Schéma implicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

Le calcul des $\boldsymbol{u}_i^n$, $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$, est possible en résolvant les $N_x + 1$ équations **linéaires** suivantes où l'on note $E = D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$ et $C = 1 + 2E$:

$$3\boldsymbol{u}_0^n - 4\boldsymbol{u}_1^n + \boldsymbol{u}_2^n = 2\frac{\Delta_x}{D}\alpha(t^n). \tag{4.115}$$

$$C\boldsymbol{u}_i^n - E(\boldsymbol{u}_{i+1}^n + \boldsymbol{u}_{i-1}^n) = \boldsymbol{u}_i^{n-1} + \Delta_t \boldsymbol{f}_i^n, \ \forall i \in]\!]0, N_x[\![\tag{4.116}$$

$$\boldsymbol{u}_{N_x}^n = \beta(t^n), \tag{4.117}$$

Schéma implicite en temps pour l'EDP (54) à (4.84)

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{b}^n \tag{4.118}$$

avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N_x+1}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b}^n \in \mathbb{R}^{N_x+1}$ et

$$\boldsymbol{U}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_0^n \\ \boldsymbol{u}_1^n \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{N_x-1}^n \\ \boldsymbol{u}_{N_x}^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_x+1}, \quad \text{i.e. } \boldsymbol{U}^n(i) = \boldsymbol{u}_{i-1}^n, \ \forall i \in [\![1, N_x+1]\!]$$

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{b}^n \iff$$

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c}
3 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
-E & C & -E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -E & C & -E & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & -E & C & -E & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -E & C & -E \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
\boldsymbol{u}_0^n \\
\hline
\boldsymbol{u}_1^n \\
\boldsymbol{u}_2^n \\
\vdots \\
\boldsymbol{u}_{N_x-2}^n \\
\boldsymbol{u}_{N_x-1}^n \\
\hline
\boldsymbol{u}_{N_x}^n
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
2\frac{\Delta_x}{D}\alpha(t^n) \\
\hline
\boldsymbol{u}_1^{n-1} + \Delta_t \boldsymbol{f}_1^n \\
\boldsymbol{u}_2^{n-1} + \Delta_t \boldsymbol{f}_2^n \\
\vdots \\
\boldsymbol{u}_{N_x-2}^{n-1} + \Delta_t \boldsymbol{f}_{N_x-2}^n \\
\boldsymbol{u}_{N_x-1}^{n-1} + \Delta_t \boldsymbol{f}_{N_x-1}^n \\
\hline
\beta(t^n)
\end{array}\right) \tag{4.119}$$

L'algorithme formel est donc le suivant :

1: $\boldsymbol{U}_i^0 \leftarrow u_0(x_i),\ \forall i \in [\![0, N_x]\!]$
2: **Pour** $n \leftarrow 1$ **à** N_t **faire**
3: Calcul de $\boldsymbol{U}^n$ en résolvant le système linéaire (4.119)
4: **Fin Pour**

Exercise 9.2

Q.1 *Ecrire la fonction* AssembleMatGen1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \end{pmatrix} \tag{4.120}$$

où α, β, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 *et* b_3 *sont des réels donnés.*

Q.2 *Ecrire la fonction* SndMbrGen1D *retournant le vecteur* $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^d$ *défini par*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{d-2} \\ \beta \end{pmatrix} \tag{4.121}$$

où α, β, $c_1, \dots, c_{d-2}$ *sont des réels donnés.*

Exercise 9.3

Q.1 *Ecrire une fonction algorithmique* HEAT1DIM *permettant de retourner la discrétisation en temps, la discrétisation en espace et l'ensemble des* $\boldsymbol{u}_i^n$, $i \in [\![0, N_x]\!]$, $n \in [\![1, N_t]\!]$ *calculés par le schéma* ***implicite*** *en temps pour l'EDP* (54) *à* (4.84).

Q.2 *Ecrire un programme utilisant cette fonction et permettant de calculer la solution numérique d'un problème dont on connait la solution exacte.*

Algorithme 3 Fonction HEAT1DIM (version non vectorisée)

```
Fonction [t, x, U] ← HEAT1DIM ( a, b, T, D, f, u_0, α, β, N_x, N_t )
    t ← DISREG(0, T, N_t)
    Δ_t ← T/N_t
    x ← DISREG(a, b, N_x)
    Δ_x ← (b − a)/N_x
    E ← D Δ_t/Δ_x^2, C ← 1 + 2E
    Pour i ← 1 à N_x + 1 faire                                  ▷ Condition initiale
        U(i, 1) ← u_0(x(i))
    Fin Pour
    A ← ASSEMBLEMATGEN1D(d, (3, −4, 1), (1, 0, 0), C, −E)
    Pour n ← 1 à N_t faire                                      ▷ Boucle en temps
        Pour i ← 1 à N_x − 2 faire                              ▷ Schéma
            v(i) ← U(i + 1, n) + Δ_t f(t(n), xi)
        Fin Pour
        L ← 2(Δ_x/D)α(t(n))
        B ← SNDMBRGEN1D(d, v, L, β(t(n)))
        U(:, n + 1) ← SOLVE(A, B)
    Fin Pour
Fin Fonction
```

Algorithme 4 Fonction HEAT1DIM (version vectorisée)

1: **Fonction** $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \mathbb{U}] \leftarrow$ HEAT1DIM $(a, b, T, D, f, u_0, \alpha, \beta, N_x, N_t)$
2: $\quad \boldsymbol{t} \leftarrow$ DISREG$(0, T, N_t)$
3: $\quad \Delta_t \leftarrow T/N_t$
4: $\quad \boldsymbol{x} \leftarrow$ DISREG(a, b, N_x)
5: $\quad \Delta_x \leftarrow (b-a)/N_x$
6: $\quad E \leftarrow D\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2},\ C \leftarrow 1 + 2E$
7: $\quad \mathbb{U}(:, 1) \leftarrow u_0(\boldsymbol{x})$ ▷ Condition initiale
8: $\quad \mathbb{A} \leftarrow$ ASSEMBLEMATGEN1D$(d, (3, -4, 1), (1, 0, 0), C, E)$
9: $\quad$ **Pour** $n \leftarrow 1$ **à** N_t **faire** ▷ Boucle en temps
10: $\quad\quad \boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{U}([2 : N_x], n) + \Delta_t f(\boldsymbol{t}(n), \boldsymbol{x}([2 : N_x]))$
11: $\quad\quad L \leftarrow 2(\Delta_x/D)\alpha(\boldsymbol{t}(n))$
12: $\quad\quad \boldsymbol{B} \leftarrow$ SNDMBRGEN1D$(d, \boldsymbol{v}, L, \beta(\boldsymbol{t}(n)))$
13: $\quad\quad \mathbb{U}(:, n+1) \leftarrow$ SOLVE$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$
14: $\quad$ **Fin Pour**
15: **Fin Fonction**

Une étude de stabilité au sens de Von Neumann de ce schéma **implicite** permet de montrer qu'il est **inconditionnellement stable**!