

TRAVAUX DIRIGÉS N°1 - ALGORITHMIQUE

1 Algorithmique

EXERCICE 1

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^n k \sin(2 * k * x)$$

EXERCICE 2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^k \sin(2 * k * z/n)^k$$

EXERCICE 3

Q. 1. Reprendre les exercices précédents en utilisant les boucles «tant que».

Q. 2. Reprendre les exercices précédents en écrivant "au mieux" une fonction pour chacun d'entre eux.

EXERCICE 4

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right\}.$$

Ecrire la fonction SFT permettant de calculer $x_n(t)$.

EXERCICE 5

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ un vecteur de \mathbb{R}^m , $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur de \mathbb{R}^p et $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$ un vecteur de \mathbb{R}^q .

Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^m \left((u_i + \cos(x)) \sum_{k=1}^n (k + (x - i)^2) \right)$$

Q. 1. 1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y ? Préciser les types et les dimensions.

2. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer y . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.

3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

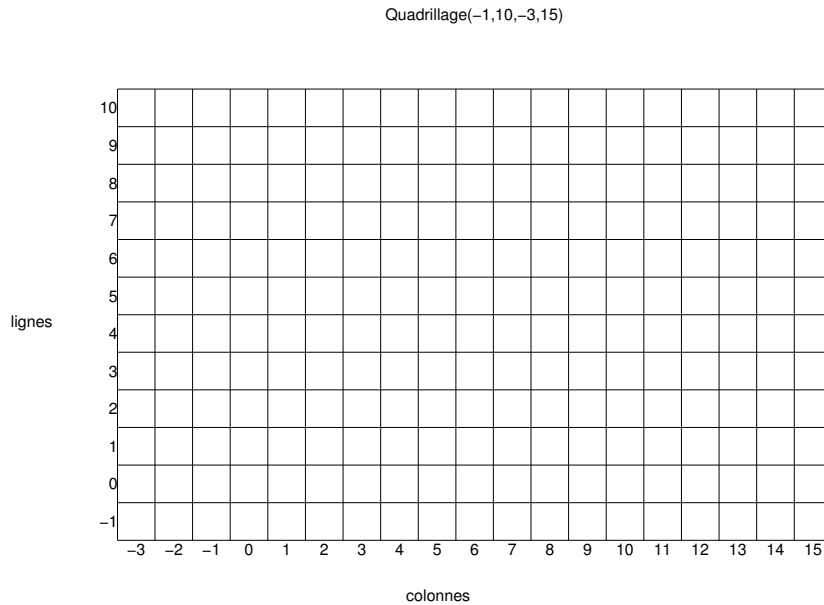
Soit $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ le vecteur de \mathbb{R}^m défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^p \left((u_i + \cos(kx)) \prod_{j=1}^q (v_k + (x - j)^2) \right), \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

- Q. 2.** 1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer z ? Préciser les types et les dimensions.
2. Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer z . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

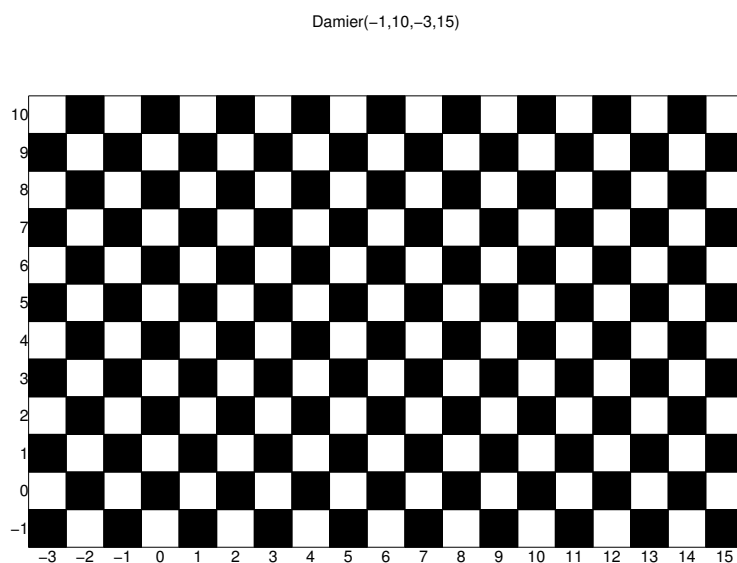
EXERCICE 6

On dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation



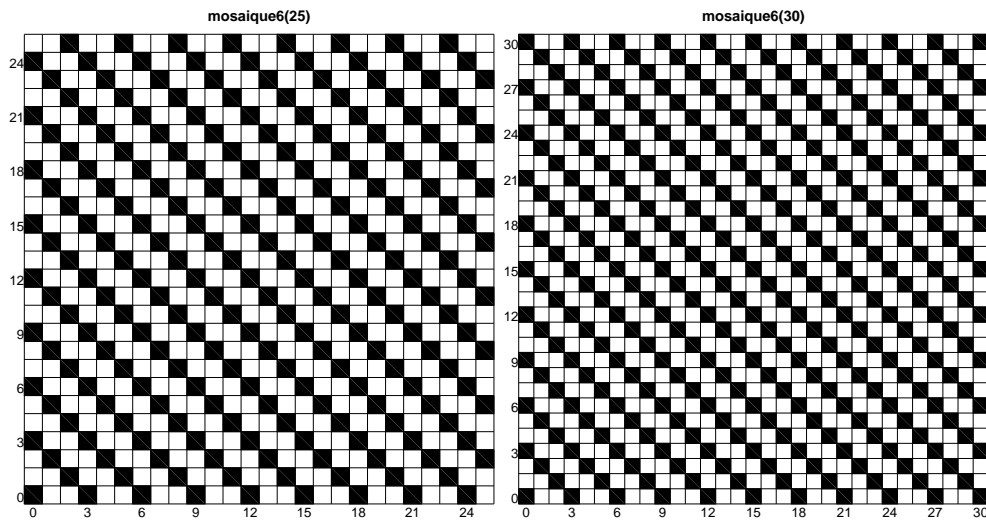
On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

- Q. 1.** Ecrire une fonction **Damier** permettant de créer un damier quelconque sachant que le pavé en bas à gauche d'un quadrillage est noir. Voici une représentation pour le quadrillage précédent :



EXERCICE 7

Q. 1. Ecrire la fonction `mosaique6(n)` permettant d'obtenir la mosaïque, sur le quadrillage associé (commande `Quadrillage(0,n,0,n)`), ayant par exemple les motifs suivants avec $n = 25$ et $n = 30$:



sachant que le carré en ligne 0 et colonne 0 est noir.

EXERCICE 8

Q. 1. Ecrire une fonction `DisReg` permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points.

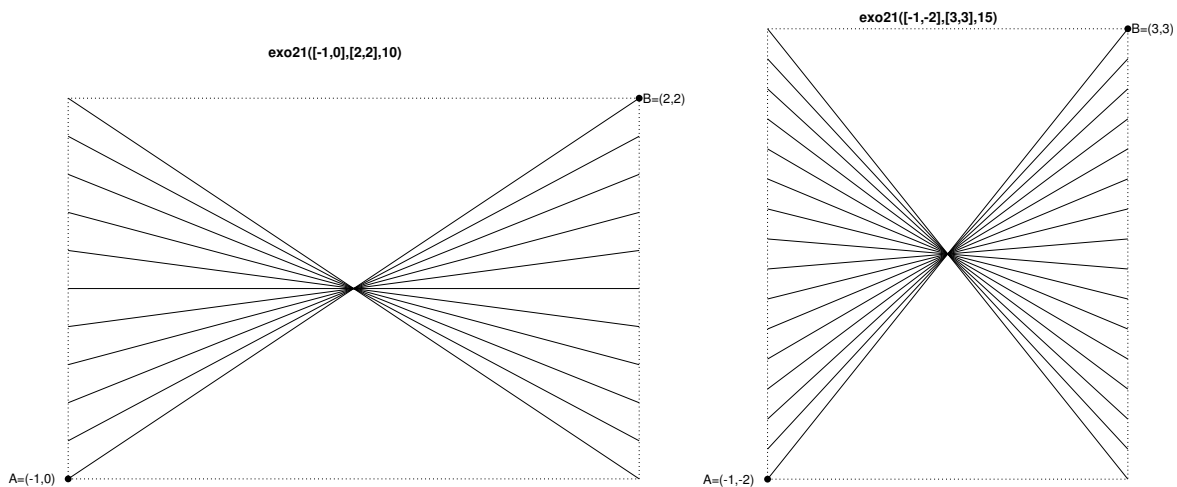
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A , (x_B, y_A) , B et (x_A, y_B) .

On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B , on dispose de la commande `plot([x_A, x_B], [y_A, y_B])`.

Q. 2. Ecrire une fonction `exo21` de paramètres A , B et n permettant de

- représenter les bords du rectangle,
- relier les points des bords gauche et droit, dont les ordonnées sont une discrétisation régulière en $n + 1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :



2 Dérivation numérique

EXERCICE 9

Q. 1. Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_P^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_R^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_P^n)$$

et

$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_R^n)$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leq C_1 h, \quad \text{avec } C_1 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

et

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^R| \leq C_2 h, \quad \text{avec } C_2 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

Q. 2. Soit $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_2^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leq E h^2, \quad \text{avec } E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

EXERCICE 10

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation **régulière** de $[a, b]$ de pas h . On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q. 1. 1. Déterminer en fonction de h et \mathbf{F} , un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

2. Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{V} précédent.

Q. 2. 1. Connaissant uniquement le vecteur \mathbf{F} , déterminer un vecteur $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$\mathbf{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

2. Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{W} précédent.