Energétique 1ère année **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2011-2012**

Partiel du 14 mars 2012

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

Exercice 1

Q. 1 *1. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy vectoriel.*

2. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy vectoriel?

3. Que cherche-t'on? ■

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) - ty^{(2)}(t) - \cos(t)y^{(1)}(t) + sin(t) &= 0,\ t \in]t_0, t_0 + T], &(1)\\ y(t_0) &= 0, &(2)\\ y^{(1)}(t_0) &= 1, &(3)\\ y^{(2)}(t_0) &= -1. &(4)\end{aligned}$$

avec $t_0 = 0$ et $T = 4\pi$. Ici, $y^{(n)}(t)$ note la dérivée n-ième de la fonction y en t.

Q. 2 *1. Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O. précédente. ■

Q. 3 *Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose $y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ (4 fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}$).*

1. Rappeler les développements de Taylor de $y(t + h)$ et $y(t - h)$.

2. En déduire trois approximations de $y'(t)$, deux à l'ordre 1 et une à l'ordre 2.

3. Déduire d'une des trois approximations précédentes, un schéma numérique explicite pour l'approximation d'un problème de Cauchy. ■

Exercice 2

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right),\ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.

Schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 : le tableau de Butcher associé s'écrit

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3).* ∎

Q. 2 (algorithmique) *Soit* a, b, $a < b$ *deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant les points* t^n, $t^0 = a < t^1 < \ldots < t^N = b$, *points de la discrétisation régulière de l'intervalle* $[a; b]$ *avec* N *pas (constant).* ∎

Q. 3 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (scalaire* $m = 1$*) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.* ∎

Q. 4 (Matlab) *Ecrire la fonction Matlab* REDRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (scalaire* $m = 1$*) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.* ∎

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 3** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right) \tag{4}$$

Q. 5

1. *Expliquer de manière détaillée l'utilisation de ce schéma pour la résolution d'un problème de Cauchy.*
2. *Ecrire la fonction algorithmique* REDAB3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (scalaire* $m = 1$*) par le schéma (4).* ∎

Q. 6 (Matlab) *On veut résoudre numériquement le problème suivant : trouver* y *telle que*

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \ \forall t \in [0, 4\pi] \tag{5}$$

$$y(0) = 0. \tag{6}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

1. *Ecrire un programme Matlab permettant de comparer graphiquement une solution numérique calculée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 à la solution exacte.*
2. *Ecrire un programme Matlab permettant de retrouver graphiquement l'ordre de la méthode calculé numériquement.* ∎