

Chapitre 3

Introduction à la résolution d'E.D.O.

3.1 Introduction

Definition 3.1

On appelle **équation différentielle ordinaire (E.D.O.) d'ordre p** une équation de la forme :

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p)}(t)) = 0.$$

Definition 3.2

On appelle **forme canonique d'une E.D.O.** une expression du type :

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p-1)}(t)). \quad (3.1)$$

Proposition 3.3

Toute équation différentielle d'ordre p sous forme canonique peut s'écrire comme un système de p équations différentielles d'ordre 1.

3.2 Problème de Cauchy

Definition 3.5: problème de Cauchy



Soit \mathbf{f} l'application continue définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ &(t, \mathbf{y}) &\longmapsto & \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec $T \in]0, +\infty[$. Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction \mathbf{y} définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &: [t^0, t^0 + T] &\longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ &t &\longmapsto & \mathbf{y}(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (3.2)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \quad (3.3)$$



Exercice 3.2.1

Quelles sont les données du problème de Cauchy?



Exercice 3.2.2

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a) \begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t), & t \in]0, 2\pi] \\ x(0) = 0, & x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)v(t) = e, & t \in]0, 100] \\ v(0) = 0, & v'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t), & t \in]0, 10] \\ x(0) = 1, & x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0, & t \in]0, T] \\ y(0) = u_0, & y^{(1)}(0) = v_0, & y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$



Exercice 3.2.3

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(B) \begin{cases} X'(t) = 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ Y'(t) = -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases}$$

avec C.I. $X(0) = X_0$ et $Y(0) = Y_0$.



Exercice 3.2.4

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(P) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I. $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$.



Théorème 3.6: Cauchy-Lipschitz

Soit le problème de Cauchy donné par la définition 3.5. On suppose que la fonction \mathbf{f} est continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et quelle est localement lipschitzienne en \mathbf{y} : $\forall (t, \mathbf{y}) \in U, \exists \mathcal{W}$ voisinage \mathbf{t} , $\exists \mathcal{V}$ voisinage \mathbf{y} , $\exists L > 0$ tels que

$$\forall s \in \mathcal{W}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V}^2, \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (3.4)$$

Sous ces hypothèses le problème de Cauchy (3.2)-(3.3) admet une unique solution.

 **Proposition 3.7**

Si $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y})$ est continue et bornée, alors \mathbf{f} satisfait la condition de Lipschitz (3.4) en \mathbf{y} .

3.3 Différences finies pour les E.D.O.

3.3.1 Différences finies pour le problème de Cauchy en dimension $m = 1$

La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma **explicite**

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (3.5)$$

La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma **implicite**

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (3.6)$$

 **Exercice 3.3.1**

On veut résoudre numériquement le problème (\mathcal{P}) suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t) + 1, \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{(n+1)} &= y^{(n)} + hf(t^n, y^{(n)}), \\ y^{(0)} &\text{donné.} \end{cases}$$

Q. 1 Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (\mathcal{P}) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{(n)}$ et la fonction y , ...

Q. 2 Soit a, b , $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction **DISREG** retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation.

Q. 3 Ecrire une fonction **REDEP** retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{(n)})$ calculés par le schéma d'Euler progressif.

Q. 4 Ecrire un algorithme complet de résolution de (\mathcal{P}) par le schéma d'Euler progressif.

3.3.2 Différences finies pour le problème de Cauchy en dimension m

La méthode d'**Euler progressive** sous forme vectorielle est donnée par le schéma **explicite**:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (3.7)$$

La méthode d'**Euler régressive** sous forme vectorielle est donnée par le schéma **implicite**:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}), \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (3.8)$$

3.4 Méthodes à un pas ou à pas séparés

♥ Définition 3.8: Méthodes à un pas

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (3.9)$$

Le schéma (3.9) converge sur l'intervalle $[t^0, t^0+T]$ si, pour la suite des $\mathbf{y}^{[n]}$ calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas h diminue:

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathbf{y}^{[n]} - \mathbf{y}(t^n)\| = 0$$

♥ Définition 3.9: consistance

Le schéma de calcul (3.9) est consistant avec le problème de Cauchy (3.2)-(3.3) si

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| = 0$$

Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

📖 Théorème 3.10: consistance (admis)

Le schéma (3.9) est consistant avec le problème de Cauchy (3.2)-(3.3) si $\Phi(t, \mathbf{y}, 0) = f(t, \mathbf{y})$.

♥ Définition 3.11: stabilité

La méthode est stable si une petite perturbation sur $\mathbf{y}^{[0]}$ ou Φ n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas h .

📖 Théorème 3.12: stabilité (admis)

Si $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$ vérifie la condition de Lipschitz en \mathbf{y} alors la méthode est stable.

📖 Théorème 3.13: convergence (admis)

Si la méthode est **stable et consistante**, alors elle **converge** pour n'importe quelle valeur initiale.

♥ Définition 3.14: Ordre d'un schéma

Le schéma (3.9) est d'ordre p si la solution \mathbf{y} du problème de Cauchy (3.2)-(3.3) vérifie

$$\max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| = \mathcal{O}(h^p)$$

 **Lemme 3.15: (admis)**

Soient \mathbf{y} la solution du problème de Cauchy (3.2)-(3.3). et $(\mathbf{y}^{[n]})_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ donnés par un schéma à un pas (3.9) d'ordre p avec $\mathbf{y}^{[0]} = \mathbf{y}(t^0)$. On a alors

$$\max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \|\mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]}\| = \mathcal{O}(h^p) \quad (3.10)$$

 **Proposition 3.16: (admis)**

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

3.5 Méthodes de Runge-Kutta

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de \mathbf{f} peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (3.11)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}q, q(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$

 **Proposition 3.17: (admis)**

1. Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si \mathbf{f} est contractante en \mathbf{y} .
2. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{ij}.$$

3. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1.$$

4. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = 1/2.$$

5. Une méthode de Runge-Kutta est explicite si la matrice \mathbb{B} est triangulaire inférieure à diagonale nulle :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad j \geq i, \quad b_{ij} = 0.$$

3.5.1 Formules explicites de Runge-Kutta d'ordre 2

Le tableau de Butcher associé aux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 s'écrit sous la forme

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \quad (3.12)$$

- Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient la **méthode de Heun** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

- Avec $\alpha = 1$, on obtient la **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu**:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Exercice 3.5.1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique **REDHEUNVEC** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de \mathbf{f} .

Q. 2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.

3.5.2 Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Butcher suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \quad (3.13)$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{array}{l} \mathbf{k}_1^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} = \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} = \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} = \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{array} \quad (3.14)$$

Exercice 3.5.2

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$\begin{array}{l} \mathbf{k}_1^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} = \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} = \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} = \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{array}$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique `REDRK4VEC` permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4).

Q. 2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.

3.6 Partiel du 7 février 2017, exercice 2

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (3.15)$$

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de \mathbf{f} (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (3.16)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1,q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1,q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$.

Le tableau de Butcher suivant définit un schéma d'ordre 3 :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \quad (3.17)$$

Q. 3 Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3.17).

Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left(\mathbf{k}^{[1]}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) + \mathbf{k}^{[2]}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \right). \quad (3.18)$$

avec $\mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ et $\mathbf{k}^{[2]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f}(t + h, \mathbf{y} + h\mathbf{k}^{[1]}(t, \mathbf{y}, h))$.

Q. 4 (Algorithmique) Ecrire la fonction algorithmique `REDRK2VEC` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma d'ordre 2 précédent.

Application : On considère deux blocs de masses respectives m_1 et m_2 liés l'un à l'autre par un ressort de constante de raideur k_2 . Le bloc de masse m_1 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1 et, à l'autre extrémité du système, le bloc de masse m_2 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_3 .

La masse des ressorts est négligeable et on suppose que l'amplitude de déplacement des deux blocs est toujours suffisamment faible pour que la loi de Hooke soit vérifiée. Finalement, tous les frottements sont considérés comme négligeables.

Le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps est donnée par

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}(t) = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \quad (3.19)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}(t) = k_2 x_1(t) - (k_2 + k_3)x_2(t). \quad (3.20)$$

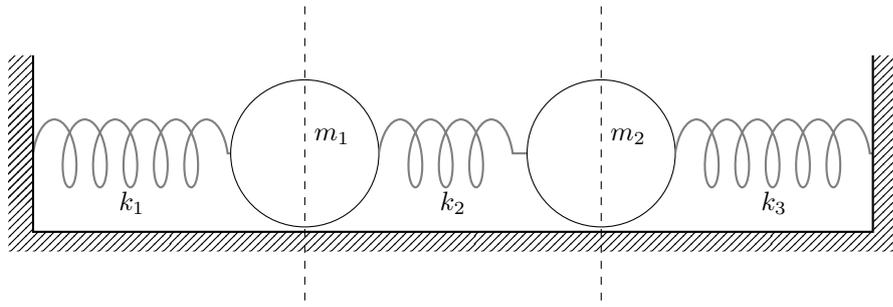


Figure 3.1: Positions d'équilibre

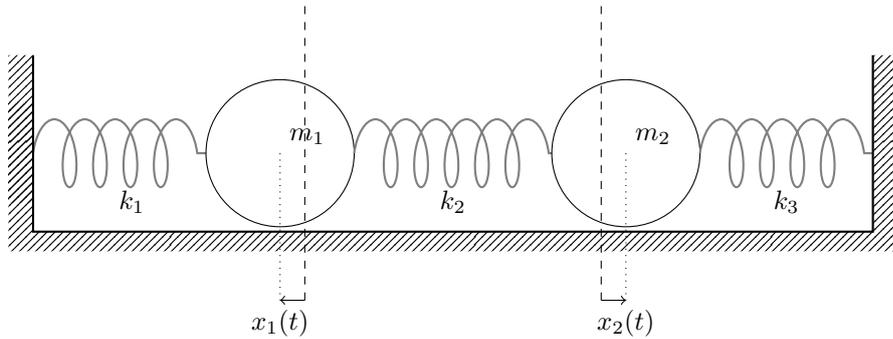


Figure 3.2: En mouvement

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les déplacements respectifs des blocs m_1 et m_2 par rapport à leur position d'équilibre au cours du temps (voir figure 3.2).

On souhaite résoudre numériquement ce problème pour le cas où :

- le bloc de masse m_1 est en position -0.5 par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial $t = 0$,
- le bloc de masse m_2 est en position $+0.5$ par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial.

Q. 5 *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy vectoriel associé à ce problème.*

Q. 6 (Algorithmique) *Ecrire un programme permettant de résoudre ce problème de Cauchy par le schéma d'ordre 3 précédent et de représenter les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (Utiliser au maximum les fonctions déjà écrites) **.

*Pour la représentation graphique, on utilisera la fonction `PLOT(X,Y)` qui relie les points $(X(i), Y(i))$ avec X tableau des abscisses et Y tableau des ordonnées.