

4.1 Exemples d'E.D.P.

4.1.1 Equation de Laplace/Poisson

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

où Δ est l'opérateur laplacien : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.

Conditions aux limites :

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de $\partial\Omega$,

$$u = g, \quad \text{sur } \Gamma_D \subset \partial\Omega. \quad (4.2)$$

- **Neumann** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{sur } \Gamma_N \subset \partial\Omega. \quad (4.3)$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad} u, \mathbf{n} \rangle$ avec \mathbf{n} normale extérieure unitaire à Ω

- **Robin** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \quad \text{sur } \Gamma_R \subset \partial\Omega. \quad (4.4)$$

4.1.3 Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - D\Delta u(t, \mathbf{x}) = \frac{f(t, \mathbf{x})}{\rho c}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.5)$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- D , coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s),
- f , production volumique de chaleur (en W/m^3),
- ρ , masse volumique du matériau (en kg/m^3),
- c , chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg/K$),
- Δu laplacien (en espace) : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$

- **condition initiale**

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$

– **Dirichlet :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad u(t, \mathbf{x}) = g_D(t, \mathbf{x}) \quad (4.7)$$

– **Neumann :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad D \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x}) \quad (4.8)$$

– **Robin :**

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad D \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) + \alpha u(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x})$$

4.1.4 Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \mathbf{x}) - c^2 \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.9)$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- $c > 0$ vitesse de propagation de l'onde,
- **conditions initiales**

$$\begin{aligned} u(0, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \text{ [position initiale]} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \mathbf{x}) &= v_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \text{ [vitesse initiale]} \end{aligned}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$

– **Dirichlet** :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad u(t, \mathbf{x}) = g_D(t, \mathbf{x})$$

– **Neumann** :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x})$$

– **Robin** :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T], \quad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \mathbf{x}) + \alpha u(t, \mathbf{x}) = g_N(t, \mathbf{x})$$

4.3 Méthodes de résolution numérique d'EDP

Méthodes déterministes :

- **méthode des différences finies**
- méthode des éléments finis
- méthode des volumes finis

4.4 Opérateurs aux différences finies

4.4.1 Dimension 1

Soient $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$(D_h^+ \varphi)(x) = \frac{1}{h} (\varphi(x+h) - \varphi(x)) \quad (4.10)$$

$$(D_h^- \varphi)(x) = \frac{1}{h} (\varphi(x) - \varphi(x-h)) \quad (4.11)$$

$$(D_h^0 \varphi)(x) = \frac{1}{2h} (\varphi(x+h) - \varphi(x-h)) \quad (4.12)$$

- D_h^+ **opérateur progressif/décentré avancé**
- D_h^- **opérateur rétrograde/décentré retardé**
- D_h^0 **opérateur centré**

Definition 4.1

Soit $h > 0$. On dit qu'un opérateur aux différences finies D_h est une approximation consistante d'ordre p de $\frac{d^k \varphi}{dx^k}$ si pour tout $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière on a

$$\max_{x \in [a, b]} \left| (D_h \varphi)(x) - \frac{d^k \varphi}{dx^k}(x) \right| \leq Ch^p, \quad (4.13)$$

où C est une constante indépendante de h .

Proposition 4.2

Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est suffisamment régulière, les opérateurs D_h^+ et D_h^- appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{d\varphi}{dx}$ et l'opérateur D_h^0 appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}$.

Exercice 4.4.1

Soient $h > 0$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant

$$\begin{aligned} (D_h^+ \varphi)(x) &= \frac{1}{h} (\varphi(x+h) - \varphi(x)) \\ (D_h^- \varphi)(x) &= \frac{1}{h} (\varphi(x) - \varphi(x-h)) \\ (D_h^0 \varphi)(x) &= \frac{1}{2h} (\varphi(x+h) - \varphi(x-h)) \end{aligned}$$

Q. 1 Montrer que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, D_h(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda D_h\varphi + \mu D_h\psi$.)

Q. 2 On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}^k([a, b]; \mathbb{R})$ avec $k \geq 2$. Montrer que les opérateurs D_h^+ et D_h^- sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{d\varphi}{dx}$.

Q. 3 On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}^k([a, b]; \mathbb{R})$ avec $k \geq 3$. Montrer que l'opérateur D_h^0 est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}$.

Proposition 4.3

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$. On note D_h^2 l'opérateur défini, pour tout $x \in]a, b[$ et $h > 0$ tels que $x \pm h \in [a, b]$, par

$$(D_h^2 \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h^2} [\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)]. \quad (4.14)$$

Alors $D_h^2 \varphi$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$.

De plus on a

$$D_h^2 \varphi = D_{\frac{h}{2}}^0 (D_{\frac{h}{2}}^0 \varphi) = D_h^+ (D_h^- \varphi) = D_h^- (D_h^+ \varphi) \quad (4.15)$$

est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$.

4.4.2 Dimension $n > 1$

Proposition 4.4: (admis)

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^n et f une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}(U)$ alors $\forall \mathbf{x} \in U, \forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $\mathbf{x} + h\mathbf{e}^{[i]} \in U, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel quel

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}^{[i]}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(\mathbf{x}) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}(\mathbf{x} + \theta h\mathbf{e}^{[i]}) \quad (4.16)$$

où $\mathbf{e}^{[i]}$ est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, $h > 0$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned}(D_{h,i}^+ \varphi)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{h} \left(\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}^{[i]}) - \varphi(\mathbf{x}) \right) \\ (D_{h,i}^- \varphi)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{h} \left(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x} - h\mathbf{e}^{[i]}) \right) \\ (D_{h,i}^0 \varphi)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2h} \left(\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}^{[i]}) - \varphi(\mathbf{x} - h\mathbf{e}^{[i]}) \right)\end{aligned}$$



Exercice 4.4.2

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière, $h > 0$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant définis pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$

$$\begin{aligned}(D_{h,i}^+ \varphi)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{h} \left(\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}^{[i]}) - \varphi(\mathbf{x}) \right) \\ (D_{h,i}^- \varphi)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{h} \left(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x} - h\mathbf{e}^{[i]}) \right) \\ (D_{h,i}^0 \varphi)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2h} \left(\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}^{[i]}) - \varphi(\mathbf{x} - h\mathbf{e}^{[i]}) \right)\end{aligned}$$

avec $\mathbf{e}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q. 1 Montrer que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \forall \psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, D_{h,i}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda D_{h,i}\varphi + \mu D_{h,i}\psi$.)

Q. 2 On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ avec $k \geq 2$. Montrer que les opérateurs $D_{h,i}^+$ et $D_{h,i}^-$ appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

Q. 3 On suppose que $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ avec $k \geq 3$. Montrer que l'opérateur $D_{h,i}^0$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.



Proposition 4.5

Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est suffisamment régulière, les opérateurs $D_{h,i}^+$ et $D_{h,i}^-$ appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ et l'opérateur $D_{h,i}^0$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.



Proposition 4.6

Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi \in \mathcal{C}^4(U \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On note $D_{h,i}^2$ l'opérateur défini, pour tout $\mathbf{x} \in U$ et $h > 0$ vérifiant $\mathbf{x} \pm h\mathbf{e}^{[i]} \in U$, par

$$(D_{h,i}^2 \varphi)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h^2} \left[\varphi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}^{[i]}) - 2\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x} - h\mathbf{e}^{[i]}) \right] \quad (4.17)$$

Alors $D_{h,i}^2 \varphi$ est approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$.

De plus, on a

$$D_{h,i}^2 \varphi = D_{\frac{h}{2},i}^0 (D_{\frac{h}{2},i}^0 \varphi) = D_{h,i}^+ (D_{h,i}^- \varphi) = D_{h,i}^- (D_{h,i}^+ \varphi). \quad (4.18)$$