TRAVAUX DIRIGÉS - ALGORITHMIQUE/DÉRIVATION

1 Algorithmique

EXERCICE 1

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2 * k * x)$$

EXERCICE 2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^{k} sin(2 * k * z/n)^k$$

EXERCICE 3

Q. 1. Reprendre les exercices précédents en utilisant les boucles «tant que».

Q. 2. Reprendre les exercices précédents en écrivant "au mieux" une fonction pour chacun d'entre eux.

EXERCICE 4

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right\}.$$

Ecrire la fonction `SFT` permettant de calculer $x_n(t)$.

EXERCICE 5

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.

Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^{m}\left((u_i + \cos(x))\sum_{k=1}^{n}(k + (x-i)^2)\right)$$

Q. 1.
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y? Préciser les types et les dimensions.
2. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer y. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^{p}\left((u_i + \cos(kx))\prod_{j=1}^{p}(v_k + (x-j)^2)\right),\ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

Q. 2.
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $\boldsymbol{z}$? Préciser les types et les dimensions.
2. Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer $\boldsymbol{z}$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.

3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

Exercice 6

Q. 1. Ecrire une fonction `DisReg` permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ en $n + 1$ points.

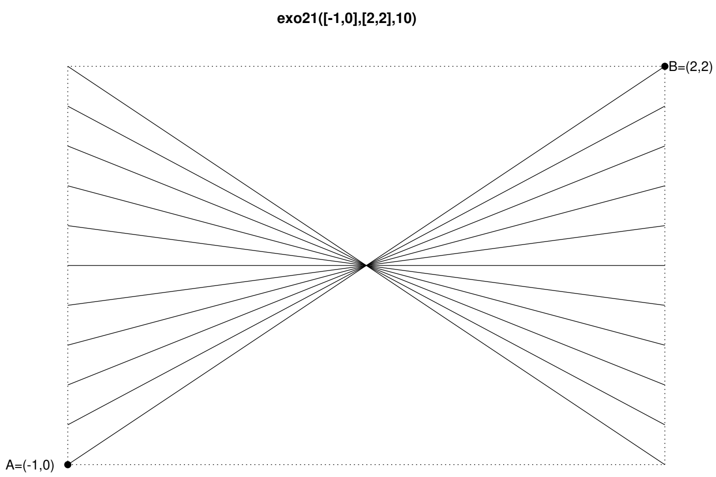
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A, (x_B, y_A), B et (x_A, y_B).

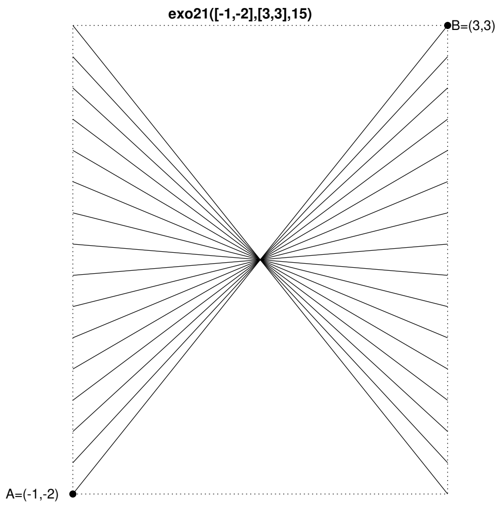
On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B, on dispose de la commande `plot(`$[x_A, x_B]$`,`$[y_A, y_B]$`)`.

Q. 2. Ecrire une fonction `exo21` de paramètres A, B et n permettant de

- représenter les bords du rectangle,
- relier les points des bords gauche et droit, dont les ordonnées sont une discrétisation régulière en $n+1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.

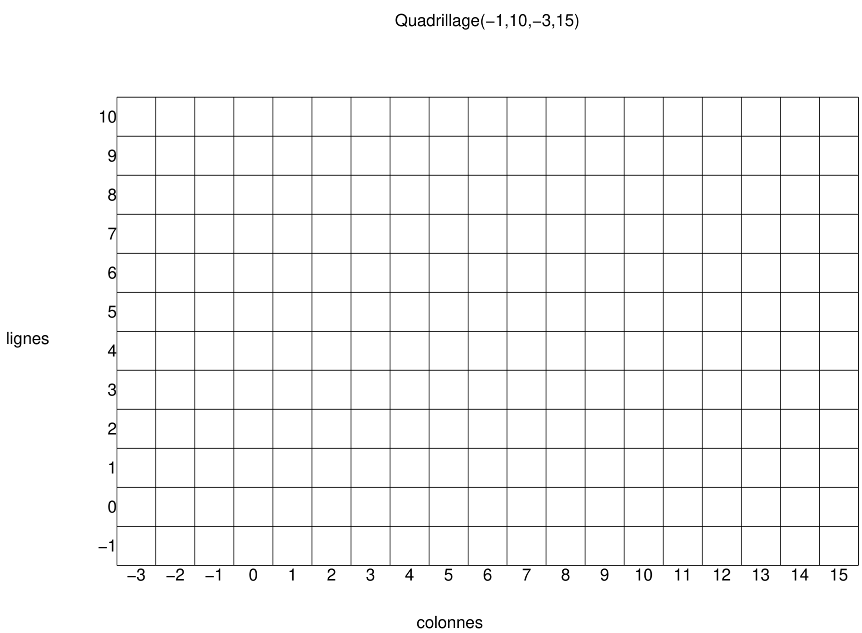
Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :





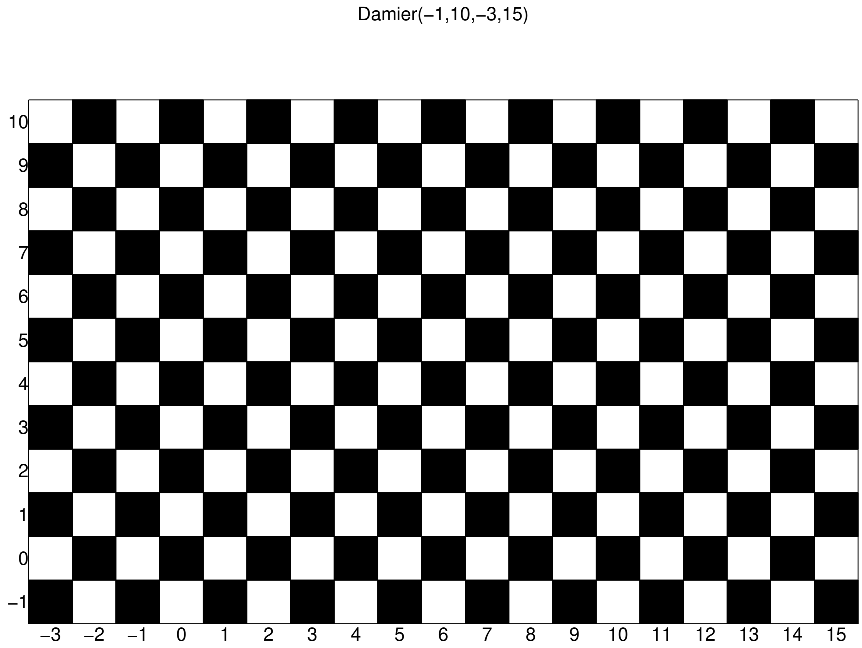
Exercice 7

On dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation



On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

Q. 1. Ecrire une fonction `Damier` permettant de créer un damier quelconque sachant que le pavé en bas à gauche d'un quadrillage doit toujours être noir. Voici une représentation pour le quadrillage précédent :



2 Dérivation numérique

Exercice 8

Q. 1. Soit $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_P^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_R^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que
$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2}\, y^{(2)}(\eta_P^n)$$
et
$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2}\, y^{(2)}(\eta_R^n)$$
2. En déduire que
$$|\, y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leqslant C_1 h, \quad \text{avec} \quad C_1 = \frac{1}{2} \max_{t\in[t^n,t^{n+1}]} |\, y^{(2)}(t)|$$
et
$$|y'(t^n) - (Dy)_n^R| \leqslant C_2 h, \quad \text{avec } C_2 = \frac{1}{2} \max_{t\in[t^{n-1},t^n]} |\, y^{(2)}(t)|$$

Q. 2. Soit $y \in \mathcal{C}^3([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_2^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que
$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12}(y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$
2. En déduire que
$$|\, y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leqslant E h^2, \quad \text{avec} \quad E = \frac{1}{6} \max_{t\in[t^{n-1},t^{n+1}]} |\, y^{(3)}(t)|$$

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0,N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ de pas h. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$.

Q. 1. 1. Déterminer en fonction de h et $\boldsymbol{F}$, un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N]\!].$$

2. Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédant.

Q. 2. 1. Connaissant uniquement le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![0,N]\!]$$

2. Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédant.