

TRAVAUX PRATIQUES - E.D.P.

Groupe 3 : B13 à B17

Travail individuel et personnel

Table des matières

1	Différences finies 1D	1
1.1	Problème modèle Dirichlet/Dirichlet	1
1.2	Problème modèle Neumann/Dirichlet	3
1.2.1	Neumann ordre 1	3
1.2.2	Neumann ordre 2	3
2	Les Différences Finies pour l'équation de la chaleur	3

1 Différences finies 1D

1.1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\tag{1.1}$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0, b = \pi, f(x) = \cos(x - 1) + 9 \sin(3x + 1), u_a = \cos(1) + \sin(1)$ et $u_b = \cos(\pi - 1) + \sin(3\pi + 1)$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x - 1) + \sin(3x + 1)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Ecrire une fonction Lap1D (fichier Lap1D.m) permettant de générer cette matrice.* ■

Le programme fourni (fichier Edp0.m), utilisant la fonction précédente, permet de résoudre numériquement le problème (1.1)-(1.2)-(1.3) par un schéma différences finies d'ordre 2. Ce programme va afficher la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.

Dans ce programme, la variable **x** contient l'ensemble des $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ définie par

$$x_i = a + ih, \text{ avec } h = (b - a)/N.$$

Q. 2 Ecrire le programme `OrdreEdp0` (fichier `OrdreEDP0.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 1. ■

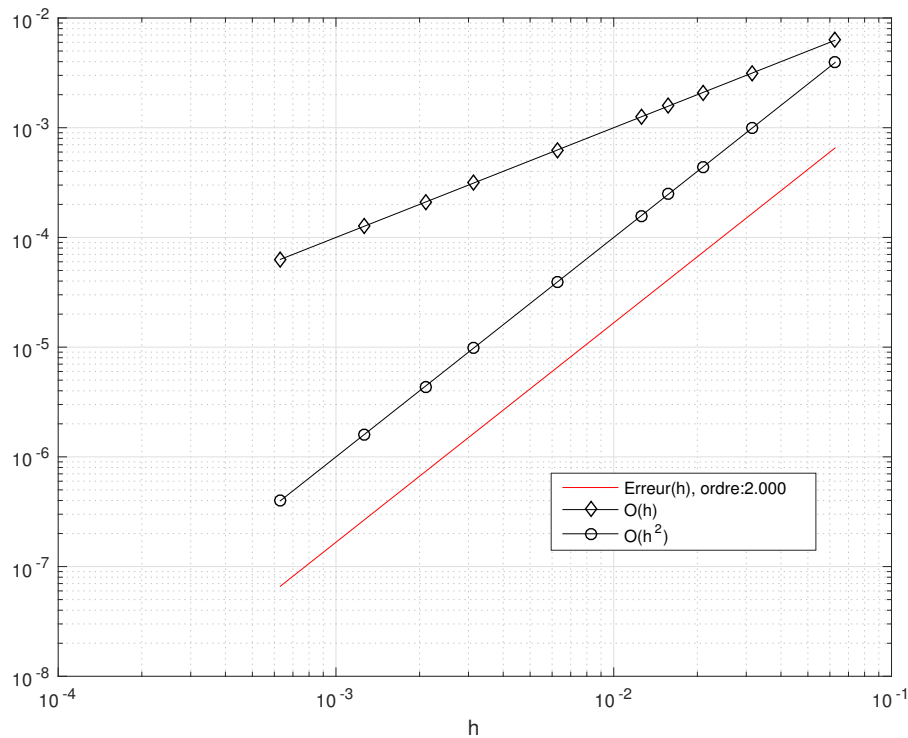


FIGURE 1 – Représentation de l'erreur en fonction de h

Q. 3 1. Ecrire le programme `Edp1` (fichier `Edp1.m`) permettant de calculer une solution approchée de :

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[\quad (1.4)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

avec $\nu \geq 0$. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera la solution approchée ainsi que la solution exacte.

2. Ecrire le programme `OrdreEdp1` (fichier `OrdreEDP1.m`) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement. ■

A faire en 1h00 (temps indicatif)

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-Q1aQ3` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q1 à Q3. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour sujet "`<NOM> TP2 Q1 a Q3`".

1.2 Problème modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\quad (1.7)$$

$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \cos(x)$, $v_a = 2$ et $u_b = 4\pi + 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + 2x$.

1.2.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Q. 4 Ecrire le programme Edp2 (fichier Edp2.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. ■

Q. 5 Ecrire le programme OrdreEdp2 (fichier OrdreEDP2.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

1.2.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

Q. 6 Ecrire le programme Edp3 (fichier Edp3.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. ■

Q. 7 Ecrire le programme OrdreEdp3 (fichier OrdreEDP3.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

— A faire en 2h00 (temps indicatif) —

- ◇ Créer une archive compressée nommée <NOM>-TP2-Q4aQ7 contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q4 à Q7. Ici <NOM> correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à cuvelier@math.univ-paris13.fr ayant pour sujet "<NOM> TP2 Q4 a Q7".

2 Les Différences Finies pour l'équation de la chaleur

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + c(x)u(t, x) = f(t, x), \forall (t, x) \in]t_0; t_0 + T] \times]a; b[, \quad (2.1)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \forall x \in [a; b], \quad (2.2)$$

$$u(t, a) = u_a(t), \forall t \in [t_0; t_0 + T], \quad (2.3)$$

$$u(t, b) = u_b(t), \forall t \in [t_0; t_0 + T]. \quad (2.4)$$

avec ν un réel strictement positif, $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et c une fonction positive.

On note t^n , $n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ et x_i , $i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0; t_0 + T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

On souhaite implémenter deux schémas de résolution de cette E.D.P. :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + c_i u_i^{n+1} = f_i^{n+1}. \quad (2.5)$$

et

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + c_i u_i^n = f_i^n. \quad (2.6)$$

où $\Delta t = T/N_t$, $\Delta x = (b-a)/N_x$, $f_i^n = f(t^n, x_i)$, $c_i = c(x_i)$ et $u_i^n \approx u(t^n, x_i)$.

On rappelle que le premier schéma est le **schéma d'Euler implicite** et le second le **schéma d'Euler explicite**. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable et le schéma d'Euler explicite est stable sous la condition de C.F.L.

$$\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

On note, $\forall n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$, \mathbf{U}^n les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $U_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$.

Q. 8 Pour chaque schéma, écrire sur feuille et **de manière détaillée** la discrétisation de l'E.D.P. (2.1) à (2.4) ■

On étudie cette E.D.P. avec les données $t_0 = 0$, $T = 2$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $\nu = 2$, $k = 5$

$$\begin{aligned} c(x) &= 1 + x/4, \\ f(t, x) &= -k \sin(kt) \cos(x) + \nu \cos(kt) \cos(x) + (1 + x/4) \cos(kt) \cos(x), \\ u_0(x) &= \cos(kt_0) \cos(x), \\ u_a(t) &= \cos(kt) \cos(a), \\ u_b(t) &= \cos(kt) \cos(b). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte est donnée par $u_{\text{ex}}(t, x) = \cos(kt) \cos(x)$.

Q. 9 Pour résoudre l'E.D.P. par un schéma d'Euler implicite, le programme `mainChaleurImplicite.m` (script Matlab) est fourni, ainsi que les fonctions `CalculF.m`, `NormInf.m` et `PlotSol.m` :

voir fichier `CodesEDPchaleur.tar.gz`

Il manque le fichier `EulerImplicite.m` correspondant à la fonction :

```
[t, x, u] = EulerImplicite ( EDP, Nt, Nx )
```

résolvant l'E.D.P. par un schéma d'Euler implicite avec

- **EDP** : structure, définie dans `mainChaleurImplicite.m`, contenant l'ensemble des données de l'E.D.P. à résoudre.
- **Nt** : nombre de pas de discrétisation en temps,
- **Nx** : nombre de pas de discrétisation en espace,
- **t** : discrétisation en temps (dimension $Nt+1$),
- **x** : discrétisation en espace (dimension $Nx+1$),
- **u** : $u(i,n)$ solution approchée au temps $t(n)$ et point $x(i)$ (dimension $(Nx+1, Nt+1)$),

Écrire la fonction `EulerImplicite`. ■

Q. 10 1. Pour résoudre l'E.D.P. par un schéma d'Euler explicite, le programme `mainChaleurExplicite` (script Matlab) est fourni, ainsi que les fonctions `CalculF.m`, `NormInf.m` et `PlotSol.m` (voir lien de la question précédente).

Il manque le fichier `EulerExplicite.m` correspondant à la fonction :

```
[t, x, u] = EulerExplicite ( EDP, Nt, Nx )
```

résolvant l'E.D.P. par un schéma d'Euler explicite. Les paramètres sont identiques à ceux de la fonction `EulerImplicite`.

Écrire la fonction `EulerImplicite`.

2. Dans le programme `mainChaleurExplicite`, changer le paramètre `Nt` de 2100 à 2000. Que se passe-t-il lors de la résolution ? ■

Comme première application, résoudre numériquement par le schéma implicite d'Euler le problème de conduction thermique dans une barre de longueur $L = 6$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in]0; T[\times]0; L[, \quad (2.7)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [0; L], \quad (2.8)$$

$$u(t, 0) = u_g(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (2.9)$$

$$u(t, L) = u_d(t), \quad \forall t \in [0; T]. \quad (2.10)$$

avec $T = 10$, $u_0(x) = 100$, $\forall x \in [0, L]$

$$u_g(t) = \begin{cases} 100 - 90t, & \forall t \in [0, 1] \\ 10, & \forall t > 1 \end{cases}$$

$$u_d(t) = \begin{cases} 100 - 80t, & \forall t \in [0, 1] \\ 20, & \forall t > 1 \end{cases}$$

- Q. 11**
1. Ecrire le programme `Q11main.m` permettant de résoudre ce problème par le schéma d'Euler implicite.
 2. Exécuter ce programme pour différentes valeurs de ν (par exemple $\nu = 0.1$, $\nu = 1$ et $\nu = 10$). Qu'observe-t'on ? ■

Pour la seconde application, la seule modification par rapport à l'application précédente est que la conductivité thermique est une fonction constante par morceaux en espace :

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in [0, \frac{L}{3}] \\ 0.1 & \forall x \in]\frac{L}{3}, \frac{2L}{3}] \\ 1 & \forall x \in]\frac{2L}{3}, L]. \end{cases}$$

- Q. 12**
1. Expliquer rapidement, sur feuille, quels sont les modifications à apporter au programme précédent.
 2. Ecrire le programme `Q12main.m` permettant de résoudre ce problème par le schéma d'Euler implicite. ■

A faire en 3h00 (temps indicatif)

- ◇ Rendre la(les) feuilles contenant les réponses aux questions Q8, Q11.2 et Q12.1. N'oubliez pas d'écrire votre nom sur chacune des feuilles et de les numéroter.
- ◇ Créer les 4 archives compressées nommées <NOM>-TP2-Q9 à <NOM>-TP2-Q12 contenant respectivement l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q9 à Q12. Ici <NOM> correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à votre enseignant de TP ayant pour **sujet** "<NOM> TP2 Q9a12" et en fichiers joints les 4 archives compressées créées précédemment.