Energétique 1ère année | **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée | **Année 2011-2012**

Partiel du 11 avril 2012

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

Exercice 1

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x), \ \forall (t,x) \in]t_0; t_0+T]\times]a;b[, & (1)\\
u(t_0,x) &= g_0(x), \ \forall x \in [a;b], & (2)\\
u(t,a) &= g_a(t), \ \forall t \in [t_0; t_0+T], & (3)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,b) &= g_b(t), \ \forall t \in [t_0; t_0+T]. & (4)
\end{aligned}$$

avec ν un réel strictement positif, $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1
1. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*
2. *Quelles sont les données du problème* (1) *à* (4)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
3. *Quelles sont les inconnues du problème* (1) *à* (4)*? (préciser le type)*
4. *Quelles sont les conditions initiales?*
5. *Quelles sont les conditions aux limites?* ▪

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0; t_0+T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i.* ▪

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1}. \quad (5)$$

Q. 3
1. *Expliquer comment le schéma* (5) *a été obtenu à partir de* (1) *et quoi correspondent les valeurs u_i^{n+1}, f_i^{n+1}, Δt et Δx*
2. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (1) *à* (4)
3. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?* ▪

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension N_x+1, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x+1]\!]$.

Q. 4
1. *Comment initialiser le vecteur $\boldsymbol{U}^0$?*
2. *En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^n$ déjà calculé, montrer que le vecteur $\boldsymbol{U}^{n+1}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{b}^n \quad (6)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}^n$ (préciser les dimensions). ▪

Q. 5 (algorithmique) 1. *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma & \mu & \nu \end{pmatrix} \tag{7}$$

où α, β, γ, μ *et* ν *sont des réels donnés.*

2. *On suppose les données du problème* (1) *à* (4) *fournies et la fonction* RSL *permettant la résolution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *déjà implémentée :* $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$.

Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) *à* (4) *en utilisant le schéma* (5). ▪

Exercice 2

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right) + \nu u(x,y) &= f(x,y),\ \forall (x,y) \in]a;b[\times]c,d[, & (1)\\ u(a,y) &= g_a(y),\ \forall y \in [c,d], & (2)\\ u(b,y) &= g_b(y),\ \forall y \in [c,d], & (3)\\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,c) &= g_c(x),\ \forall x \in]a,b[, & (4)\\ u(x,d) &= g_d(x),\ \forall x \in [a,b],. & (5) \end{aligned}$$

où a, b, c, d, sont quatre réels ($a < b$, $c < d$), ν est un réel strictement positif et $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure au domaine $[a,b] \times [c,d]$.

Q. 1 1. *Soit* $x \in]a,b[$. *Rappeler la définition de* $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,c)$ *et en déduire que* $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,c) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,c)$.

2. *Quelles sont les données du problème* (1) *à* (5)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

3. *Quelles sont les inconnues du problème* (1) *à* (5)*? (préciser le type)*

4. *Quelles sont les conditions aux limites?*

5. *Quelles propriétés les conditions aux limites doivent-elles vérifier?* ▪

On note x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ et y_j, $j \in [\![0, N_y]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[a;b]$ et $[c;d]$ avec N_x pas de discrétisation en x et N_y pas de discrétisation en y. On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \nu u_{i,j} &= f_{i,j}, & (6)\\ \frac{u_{i,2} - 4u_{i,1} + 3u_{i,0}}{2\Delta y} &= g_c(x_i). & (7) \end{aligned}$$

Q. 2 1. *Expliquer comment le schéma* (6) *a été obtenu à partir de* (1) *et a quoi correspondent les valeurs* $u_{i,j}$, $f_{i,j}$, Δx *et* Δy.

2. *Expliquer comment le schéma* (7) *a été obtenu à partir de* (5).

3. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (1) *à* (5) *en utilisant les schémas* (6) *et* (7).

4. Le schéma est de quel ordre? ∎

On note $\boldsymbol{U}$ le vecteur de dimension $d = (N_x + 1)(N_y + 1)$, écrit sous forme blocs :

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_0 \\ \hline \boldsymbol{U}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{U}_{N_y} \end{pmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{U}_j = \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{N_x,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_x+1}, \ \forall j \in [\![0, N_y]\!].$$

Q. 3 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{U}$ *est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{b} \tag{8}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{b}$ *(préciser les dimensions).* ∎