

EXAMEN DU 18 MARS 2015  
durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

**EXERCICE 1 : 12 points**

Soient  $\alpha, \beta, \nu$  trois réels et  $f$  une fonction définie sur  $[a; b]$  à valeurs réelles. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u'(x) + u(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a; b[, \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha. \quad (2)$$

$$u'(b) = \beta, \quad (3)$$

**Q. 1** 1. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

2. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

3. Quelles sont les conditions initiales?

4. Quelles sont les conditions aux limites? ■

**Q. 2** 1. Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a; b]$  avec  $N$  pas de discrétisation en espace.

2. Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) DISREG permettant d'obtenir cette discrétisation. ■

On note  $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \nu \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + u_i = f_i. \quad (4)$$

**Q. 3** 1. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes  $u_i, f_i$  et  $\Delta x$ ?

2. Donner l'ensemble  $\mathcal{E}$  des valeurs que peut prendre  $i$  dans le schéma (4).

3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez. ■

On note  $\mathbf{V}$  le vecteur de dimension  $N + 1$ , de composantes  $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$ .

**Q. 4** Montrer que le vecteur  $\mathbf{V}$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (5)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$  (préciser les dimensions). ■

**Q. 5** Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) ASSEMBLEMAT retournant une matrice  $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

où pour tout  $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \alpha_j, \beta_j, \mu_j$  sont des réels donnés. ■

**Q. 6** On suppose les données du problème (1) à (3) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  déjà implémentée :  $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ . Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions) ■

**EXERCICE 2 : 14 points**

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \beta u(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in ]0; T[ \times ]a; b[, \quad (1)$$

$$u(t, a) = u_a(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = v_b(t), \quad \forall t \in ]0; T]. \quad (3)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (4)$$

avec  $\alpha, \beta$  deux réels,  $\alpha > 0, T > 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ .

**Q. 1** 1. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

2. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

3. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

4. Quelles sont les conditions initiales?

5. Quelles sont les conditions aux limites?

6. Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité. ■

On note  $t^n, n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$  et  $x_i, i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$  les discrétisations régulières des intervalles  $[0; T]$  et  $[a; b]$  avec  $N_t$  pas de discrétisation en temps et  $N_x$  pas de discrétisation en espace.

**Q. 2** Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des  $t^n$  et des  $x_i$ . ■

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta u_i^n = f_i^n. \quad (5)$$

$$u_{N_x-2}^n - 4u_{N_x-1}^n + 3u_{N_x}^n = 2\Delta x v_b(t^n). \quad (6)$$

**Q. 3** 1. Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs  $u_i^n, f_i^n, \Delta t$  et  $\Delta x$ .

2. Expliquer comment le schéma (6) a été obtenu à partir de (3).

3. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (5) et (6).

4. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace? ■

On note  $\mathbf{U}^n$  les vecteurs de dimension  $N_x + 1$ , de composantes  $\mathbf{U}_i^n = u_{i-1}^n, \forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$ .

**Q. 4** 1. Comment initialiser le vecteur  $\mathbf{U}^0$ ?

2. En supposant le vecteur  $\mathbf{U}^{n-1}$  déjà calculé, montrer que le vecteur  $\mathbf{U}^n$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{U}^n = \mathbf{b}^{n-1} \quad (7)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbf{b}^{n-1}$  (préciser les dimensions). ■

**Q. 5** 1. Ecrire la fonction `ASSEMBLEMAT1D` retournant la matrice  $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \nu & \mu & \nu & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \nu & \mu & \nu \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

où  $\mu, \nu, c_1, c_2$  et  $c_3$  sont des réels donnés.

2. On suppose les données du problème (1) à (3) fournies et la fonction `RSL` permettant la résolution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  déjà implémentée :  $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ .

Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (5) et (6). ■