

TRAVAUX PRATIQUES - E.D.O.

Groupe 2
2ème partie : résolution de problèmes de Cauchy

Travail individuel et personnel

Table des matières

1 Schémas numériques pour la résolution d'un problème de Cauchy	1
1.1 Schéma d'Euler progressif (ordre 1)	2
1.2 Schéma de la tangente améliorée (ordre 2)	2
1.3 Schéma de Heun (ordre 2)	2
1.4 Schémas de Runge-Kutta	2
1.5 Méthodes d'Adams-Bashforth	3
1.6 Méthodes d'Adams-Moulton	3
1.7 Schéma de Nyström (ordre 3)	3
1.8 Schémas BDF (Backward-Difference Formulas)	4
1.9 Schéma de Simpson (ordre 4)	4
2 Schéma prédicteur-correcteur	4
3 Travail à effectuer	4
4 Annexes	5
4.1 Quelques E.D.O. du premier ordre	5
4.1.1 Exemple 1	5
4.1.2 Exemple 2	6
4.1.3 Exemple 3	6

On donne tout d'abord quelques schémas numériques qui pourront être utilisé dans ce TP et ensuite le travail à faire est décrit en section 3. Pour une explication détaillée des méthodes numériques employées ici on peut utiliser le polycopié fourni `MethNumII_25fevrier2020.pdf`

1 Schémas numériques pour la résolution d'un problème de Cauchy

Definition 1.1: problème de Cauchy

Soit f l'application continue définie par

$$\begin{array}{rcl}
 \mathbf{f} & : & [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\
 & & (t, \mathbf{y}) \longmapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y})
 \end{array}$$

avec $T \in]0, +\infty]$. Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction \mathbf{y} définie par

$$\mathbf{y} : \begin{array}{l} [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t \longmapsto \mathbf{y}(t) \end{array}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.2)$$

Dans tous les schémas qui suivent on note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation régulière de $[t^0, t^0 + T]$, $\mathbf{y}^{[n]} \approx \mathbf{y}(t^n)$ et $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

1.1 Schéma d'Euler progressif (ordre 1)

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}^{[n]}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2 Schéma de la tangente améliorée (ordre 2)

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (1.4)$$

1.3 Schéma de Heun (ordre 2)

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}^{[n]} + \mathbf{f} \left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}^{[n]} \right) \right]. \quad (1.5)$$

1.4 Schémas de Runge-Kutta

- ordre 3 (version 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + \frac{h}{3}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{3}\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{4}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (1.6)$$

- ordre 3 (version 2)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{8}(2\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2 + 3\mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (1.7)$$

- ordre 3 (version 3)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]} - h\mathbf{k}_1 + h\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{4}(3\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (1.8)$$

- ordre 4 (version 1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\
\mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\
\mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\
\mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\
\mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

- ordre 4 (version 2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\
\mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{4}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{4}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\
\mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\
\mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_1^{[n]} - 2h\mathbf{k}_2^{[n]} + 2h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\
\mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 4\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

- ordre 4 (version 3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\
\mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{3}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{3}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\
\mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{2h}{3}, \mathbf{y}^{[n]} - \frac{h}{3}\mathbf{k}_1^{[n]} + h\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\
\mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_1^{[n]} - h\mathbf{k}_2^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\
\mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{8}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 3\mathbf{k}_2^{[n]} + 3\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.5 Méthodes d'Adams-Bashforth

On note $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left(3\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right). \tag{1.12}$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left(23\mathbf{f}^{[n]} - 16\mathbf{f}^{[n-1]} + 5\mathbf{f}^{[n-2]} \right). \tag{1.13}$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right). \tag{1.14}$$

Ces schémas sont **explicites** et leur ordre correspond au nombre de pas.

1.6 Méthodes d'Adams-Moulton

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left(\mathbf{f}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]} \right). \tag{1.15}$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left(5\mathbf{f}^{[n+1]} + 8\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right). \tag{1.16}$$

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right). \tag{1.17}$$

Ces schémas sont **implicites** et leur ordre correspond au nombre de pas plus un.

1.7 Schéma de Nyström (ordre 3)

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n-1]} + \frac{h}{3} \left(7\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) - 2\mathbf{f}(t^{n-1}, \mathbf{y}^{[n-1]}) + \mathbf{f}(t^{n-2}, \mathbf{y}^{[n-2]}) \right) \tag{1.18}$$

1.8 Schémas BDF (Backward-Difference Formulas)

- ordre 1

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}^{[n+1]} \quad (1.19)$$

- ordre 2

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \frac{4}{3}\mathbf{y}^{[n]} - \frac{1}{3}\mathbf{y}^{[n-1]} + \frac{2h}{3}\mathbf{f}^{[n+1]} \quad (1.20)$$

- ordre 3

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \frac{1}{11} \left(18\mathbf{y}^{[n]} - 9\mathbf{y}^{[n-1]} + 2\mathbf{y}^{[n-2]} + 6h\mathbf{f}^{[n+1]} \right) \quad (1.21)$$

- ordre 4

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \frac{1}{25} \left(48\mathbf{y}^{[n]} - 36\mathbf{y}^{[n-1]} + 16\mathbf{y}^{[n-2]} - 3\mathbf{y}^{[n-3]} + 12h\mathbf{f}^{[n+1]} \right) \quad (1.22)$$

1.9 Shéma de Simpson (ordre 4)

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n-1]} + \frac{h}{3} \left(\mathbf{f}^{[n+1]} + 4\mathbf{f}^{[n]} + \mathbf{f}^{[n-1]} \right) \quad (1.23)$$

2 Schéma prédicteur-correcteur

Il s'agit là d'une des méthodes les plus employées. Une méthode de prédiction-correction procède en deux temps : on fournit explicitement une valeur approchée de la solution au $n^{\text{ième}}$ pas (soit $\bar{\mathbf{y}}^{(n+1)}$), puis on calcule la valeur correspondante de \mathbf{f} (soit $\bar{\mathbf{f}}^{(n+1)}$) et enfin, on substitue cette valeur dans un schéma implicite (on obtient alors une valeur *corrigée*).

pour n variant de 0 à $N - 1$ faire
 Calculer une valeur approchée $\bar{\mathbf{y}}^{(n+1)}$ par un schéma explicite ;
 Evaluer $\bar{\mathbf{f}}^{(n+1)} = \mathbf{f}(t^{n+1}, \bar{\mathbf{y}}^{(n+1)})$;
 $\mathbf{y}^{[n+1]}$ à l'aide d'un schéma implicite en remplaçant l'inconnue par $\bar{\mathbf{y}}^{(n+1)}$;
 finpour

3 Travail à effectuer

Le but est de représenter graphiquement les erreurs données par plusieurs schémas et de retrouver numériquement leur ordre. Pour cela il faudra pouvoir connaître explicitement la solution du problème de Cauchy étudié. Voir l'annexe 4.1 pour plusieurs exemples d'E.D.O. avec solutions.

Q. 1 1. Ecrire les cinq fonctions Matlab suivantes correspondant à la résolution d'un problème de Cauchy :

- $[t, Y] = \text{redEUP}(f, a, b, y_0, N)$: schéma d'Euler progressif (fichier `redEUP.m`).
- $[t, Y] = \text{redTGA}(f, a, b, y_0, N)$: schéma de la tangente améliorée (fichier `redTGA.m`).
- $[t, Y] = \text{redRK4v2}(f, a, b, y_0, N)$: schéma de Runge et Kutta d'ordre 4 (version 2) (1.10) (fichier `redRK4v2.m`).
- $[t, Y] = \text{redNY3}(f, a, b, y_0, N)$: schéma de Nyström d'ordre 3 (1.18) (fichier `redNY3.m`).
- $[t, Y] = \text{redPC4v2}(f, a, b, y_0, N)$: schéma de type prédiction-correction utilisant les schémas d'Adams-Bashforth d'ordre 4 et BDF d'ordre 4 (fichier `redPC4v2.m`).

Ici les paramètres f, a, b, y_0 correspondent respectivement aux $\mathbf{f}, t^0, t^0 + T, \mathbf{y}^{[0]}$ du problème de Cauchy (1.1-1.2). Enfin, Y est le tableau contenant les $\mathbf{y}^{[n]}$, $n \in \{0, \dots, N\}$ et t est le tableau contenant les $n+1$ nombres t^n , $n \in \{0, \dots, N\}$

2. Ecrire le programme principal (fichier `erreur.m`) permettant le calcul et le tracé des erreurs. Pour une méthode donnée le tracé de l'erreur correspond au tracé de l'ensemble des points $(t^n, \text{abs}(\mathbf{y}^{[n]} - \mathbf{y}^{(t^n)}))$, $n \in \{0, \dots, N\}$.

Voir la figure 1 pour un exemple de tracé. Pour cette figure, la commande Matlab `subplot` a été utilisée.

3. Ecrire le programme principal (fichier `ordre.m`) permettant de calculer numériquement l'ordre des 5 schémas et de les représenter.
 Voir la figure 2 pour un exemple de tracé.

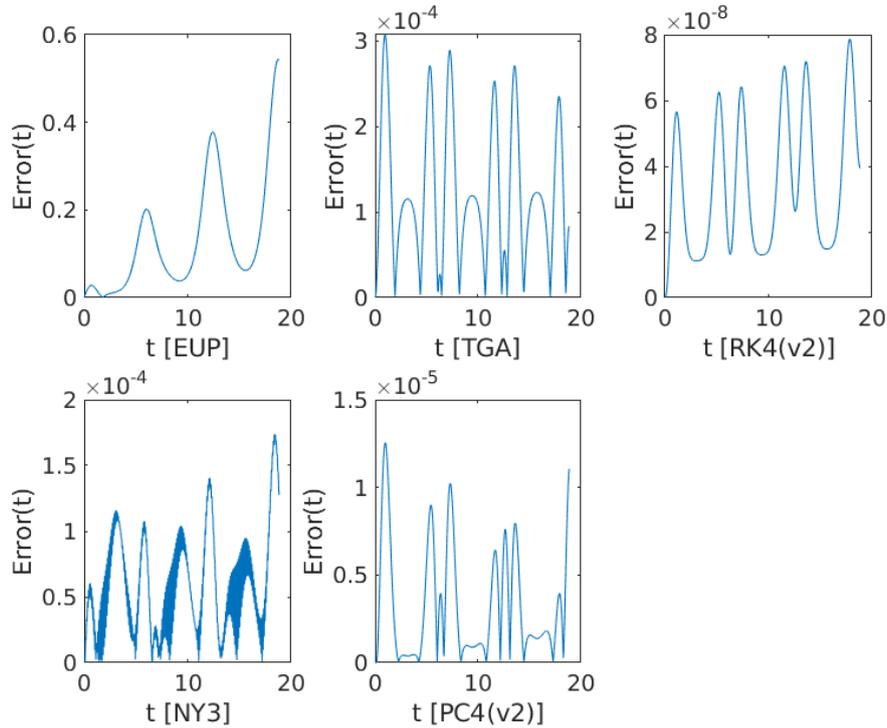


FIGURE 1 – Valeurs absolues des erreurs des 5 schémas représentées dans une unique figure

A faire en 3h00 (temps indicatif)

- ◊ Créez une archive compressée nommée `<NOM>-TP1-part2` contenant les fichiers `redEUP.m`, `redTGA.m`, `redNY3.m`, `redRK4v2.m`, `redPC4v2.m`, `erreur.m` et `ordre.m`. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◊ Envoyez un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **sujet** "`<NOM> TP1 part2`" et en fichier joint l'archive compressée créée précédemment. En cas de problème de mail, vous pouvez m'envoyer un **message privé** sur Discord et joignez lui l'archive compressée.

4 Annexes

4.1 Quelques E.D.O. du premier ordre

4.1.1 Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'E.D.O.

$$\begin{cases} y'(t) &= -\cos(t), \quad \forall t \geq 0, \\ y(0) &= \alpha, \end{cases}$$

a pour solution $y(t) = -\sin(t) + \alpha$.

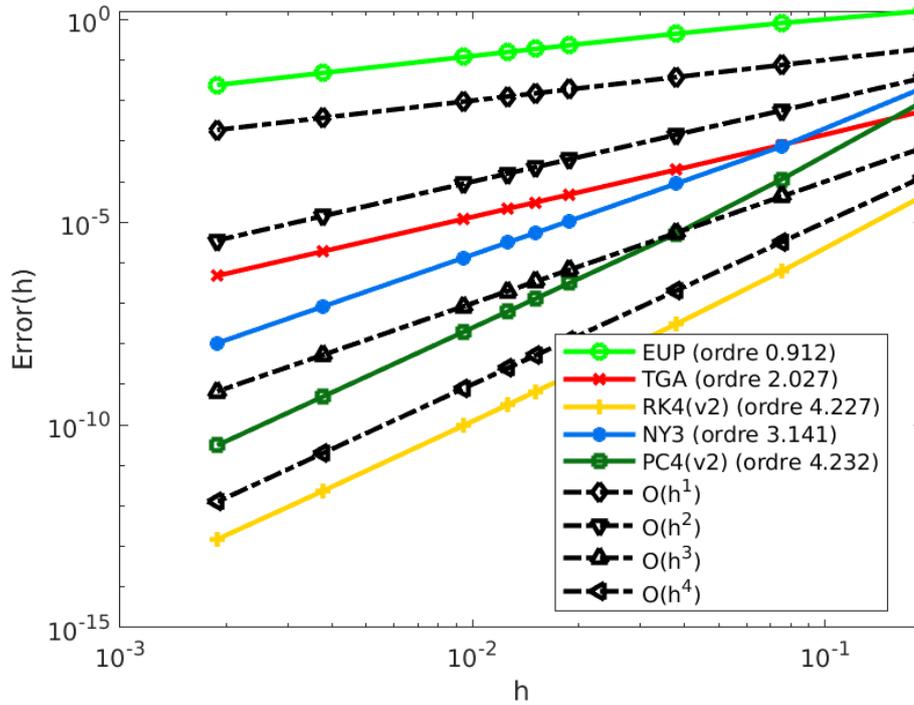


FIGURE 2 – Ordre des 5 schémas

4.1.2 Exemple 2

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. L'E.D.O.

$$\begin{cases} y'(t) = -\sin(t), \quad \forall t \geq 0, \\ y(0) = \beta, \end{cases}$$

a pour solution $y(t) = \cos(t) - 1 + \beta$.

4.1.3 Exemple 3

L'E.D.O.

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) \sin(t), \quad \forall t \geq 0, \\ y(0) = e = \exp(1), \end{cases}$$

a pour solution $y(t) = \exp(\cos(t))$.