

# Méthodes numériques II (cours 2 à 4)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2020/01/14

# Partie III

## Résolution numérique des E.D.O.

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$

- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

## 1 Exemples d'E.D.O.

- Chimie : réaction BZ
- Météorologie : modèle de Lorentz (1963)
- Mécanique : le pendule pesant

## 2 Définitions et résultats

## 3 Problème de Cauchy

## 4 Différences finies $m = 1$

## 5 Différences finies $m > 1$

## 6 Méthodes à un pas

## 7 Méthodes à pas multiples

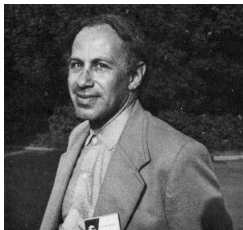
## 8 Méthodes de prédiction-corrrection

## 9 Application

# Réaction BZ (Belousov-Zhabotinsky)



(a) *Boris Pavlovich Belousov* 1893-1970, Chimiste et biophysicien russe



(b) *Anatol Zhabotinsky* 1938-2008, Chimiste russe



(c) *Ilya Prigogine* 1917-2003, Physicien et chimiste belge (origine russe). Prix Nobel de chimie en 1977

# Modèle du Brusselator (1970)

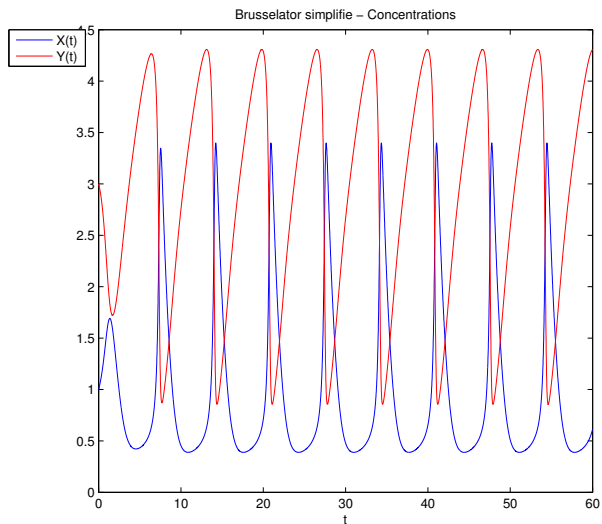
Une solution de bromate de potassium et d'acide sulfurique mélangée à une solution d'acide manolique et de bromure de sodium peut entraîner, sous certaines conditions, une oscillation de la couleur de la solution mélange du rouge au bleue avec une période de 7 secondes.

Le modèle associé est nommé **modèle du brusselator**. Sous certaines hypothèses, le modèle simplifié peut s'écrire :

$$\begin{cases} X'(t) &= 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases} \quad (1)$$

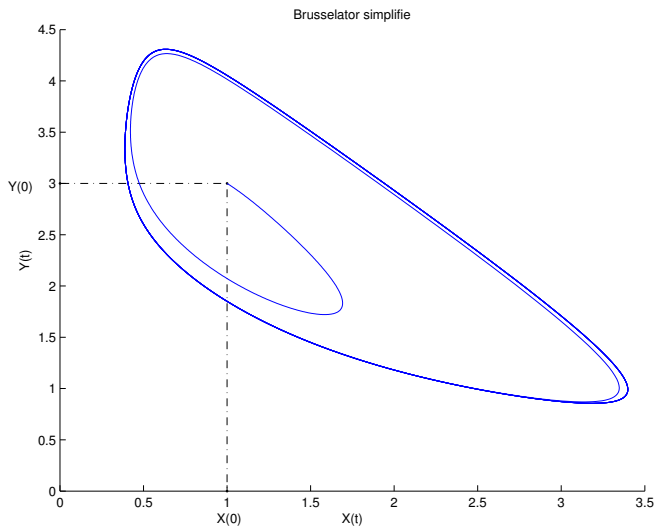
# Modèle du Brusselator

Avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3.5$  et les C.I.  $X(0) = 3$  et  $Y(0) = 2$  :



# Modèle du Brusselator

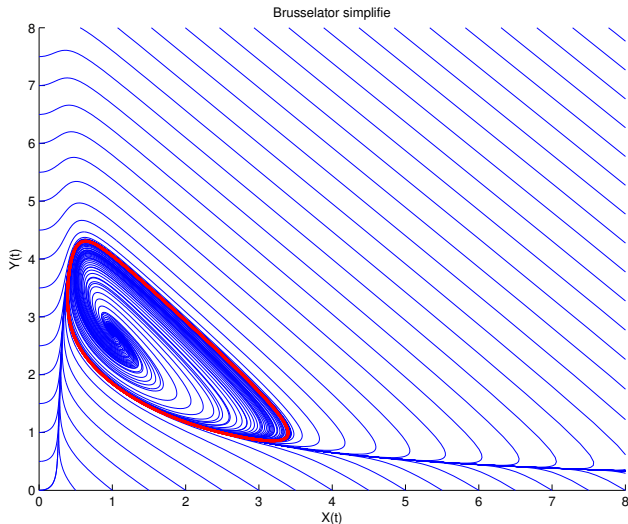
Avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3.5$  et les C.I.  $X(0) = 3$  et  $Y(0) = 2$  :





# Modèle du Brusselator

Avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3.5$  et les C.I.  $X(0) = 3$  et  $Y(0) = 2$  :





(a) *Edward Norton Lorenz*

1917-2008, Mathématicien et  
météorologiste américain

Le couplage Océan-Atmosphère est décrit par un système d'E.D.P. couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides.

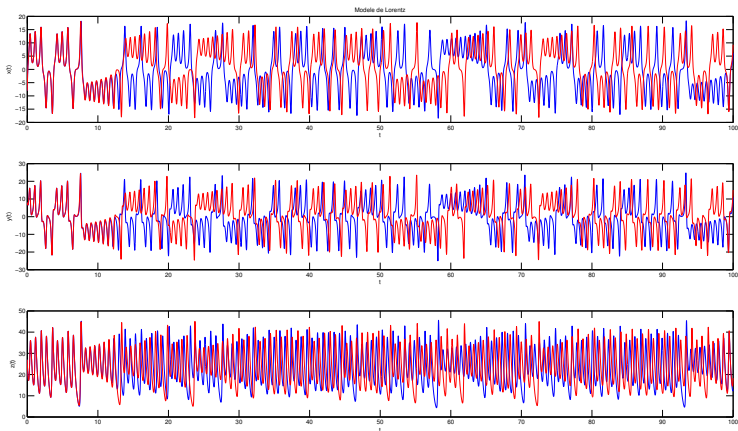
Le **modèle de Lorentz** est une version très simplifiée de ces équations pour l'étude du phénomène de convection de Rayleigh-Bénard :

$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)y(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

- $x(t)$  : proportionnel à l'intensité du mouvement de convection,
- $y(t)$  : proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants,
- $z(t)$  : proportionnel à une variation de température

# Modèle de Lorentz

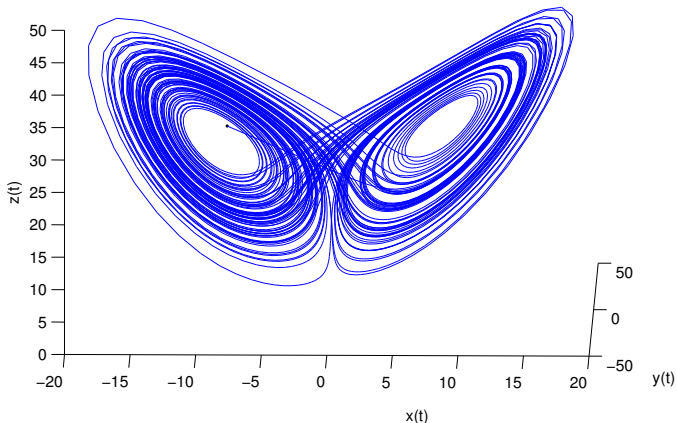
Avec  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  et les données initiales  $x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = 27$  (courbe bleue) et des données initiales perturbées  $x(0) = -8 + 1e - 4, y(0) = 8, z(0) = 27$  (courbe rouge)



# Modèle de Lorentz : papillon

En représentant la courbe paramétré  $(x(t), y(t), z(t))$  dans l'espace, on obtient l'*attracteur étrange de Lorenz* en forme d'aile de papillon

Modele de Lorentz

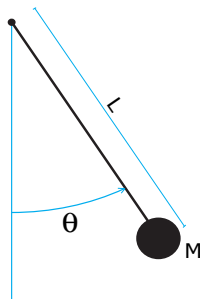


## Pendule pesant sans viscosité

Le pendule pesant : objet pesant accroché à une tige de masse négligeable, l'autre extrémité de la tige est l'axe de rotation du pendule.

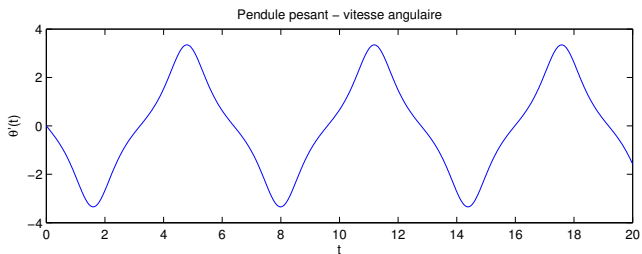
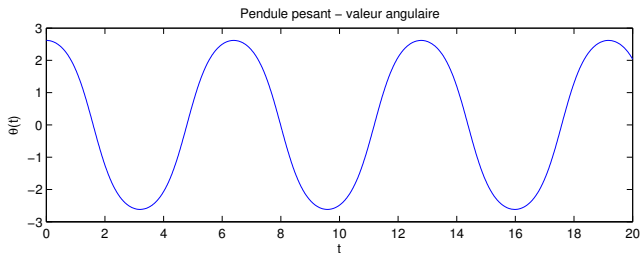
$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0. \quad (2)$$

où  $\theta(t)$  est l'angle que fait, à l'instant  $t$ , le pendule par rapport à l'axe vertical,  $L$  la longueur de la tige.



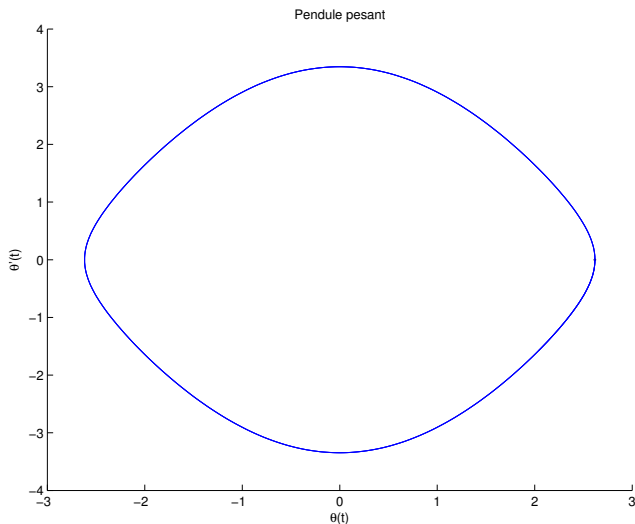
# Pendule pesant sans viscosité

Avec  $\frac{g}{L} = 3$  et les C.I.  $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\theta'_0 = 0$  :



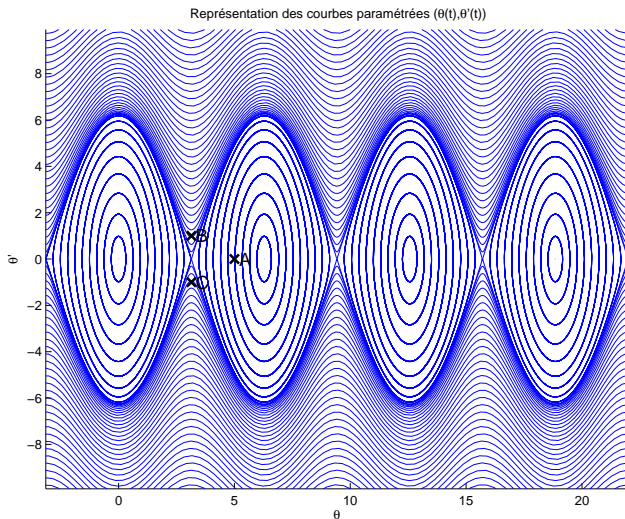
# Pendule pesant sans viscosité

Avec  $\frac{g}{L} = 3$  et les C.I.  $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\theta'_0 = 0$  :



# Pendule pesant sans viscosité

Avec  $\frac{g}{L} = 3$  :





- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats**
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

Soit  $\mathbf{y} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe

$\mathcal{C}^p$  (continûment dérivable d'ordre  $p$ ). On note  $\mathbf{y}^{(p)}$  la dérivée d'ordre  $p$  de  $\mathbf{y}$ .

### ♥ Définition 2.1

On appelle **équation différentielle ordinaire (E.D.O.) d'ordre  $p$**  une équation de la forme :

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p)}(t)) = 0.$$

### ♥ Définition 2.2

On appelle **forme canonique d'une E.D.O.** une expression du type :

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p-1)}(t)). \quad (3)$$

### 📖 Proposition 2.3

Toute équation différentielle d'ordre  $p$  sous forme canonique peut s'écrire comme un système de  $p$  équations différentielles d'ordre 1.

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy**
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

### ♥ Definition 3.1: problème de Cauchy



Soit  $f$  l'application continue définie par

$$\begin{aligned} f &: [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, \mathbf{y}) &\longmapsto f(t, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec  $T \in ]0, +\infty[$ . Le **problème de Cauchy** revient à chercher une fonction  $\mathbf{y}$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &: [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \quad (5)$$

$$(c) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$



## Exercice 1

Quelles sont les données du problème de Cauchy?

$$(C) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$



## Exercice 2

Quelles sont les données du problème de Cauchy?

- $t^0 \in \mathbb{R}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$
- la fonction  $\mathbf{f}$
- le vecteur  $\mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m$



### Exercice 3

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a) \begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t), & t \in ]0, 2\pi] \\ x(0) = 0, & x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right) v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) v(t) = e, & t \in ]0, 100] \\ v(0) = 0, & v'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t), & t \in ]0, 10] \\ x(0) = 1, & x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0, & t \in ]0, T] \\ y(0) = u_0, & y^{(1)}(0) = v_0, & y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$



#### Exercice 4

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} X'(t) = 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ Y'(t) = -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases}$$

avec C.I.  $X(0) = X_0$  et  $Y(0) = Y_0$ .



#### Exercice 5

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I.  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\theta'(0) = \theta'_0$ .



- Problème de Cauchy **linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On a  $f(t, v) = 3v - 3t$  et une solution  $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$ .

- Problème de Cauchy **linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On a  $f(t, v) = 3v - 3t$  et une solution  $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$ .

- Problème **non-linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & \text{si } t > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On a  $f(t, v) = \sqrt[3]{v}$  et **trois solutions**  $y(t) = 0$ ,  $y(t) = \sqrt{8t^3/27}$  et  $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$ .

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec  $\mathbf{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $(t^0, \mathbf{y}^{[0]}) \in U$ .

### Théorème 1: Cauchy-Lipschitz

On suppose que la fonction  $\mathbf{f}$  est continue sur  $U$  et qu'elle est localement lipschitzienne en  $\mathbf{y}$  :  $\forall (t, \mathbf{y}) \in U$ ,  $\exists \mathcal{W}$  voisinage  $t$ ,  $\exists \mathcal{V}$  voisinage  $\mathbf{y}$ ,  $\exists L > 0$  tels que

$$\forall s \in \mathcal{W}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V}^2, \quad \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (6)$$

Sous ces hypothèses le problème de Cauchy  $(\mathcal{PC})$  admet une unique solution.

### Proposition 3.2

Si  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y})$  est continue et bornée, alors  $\mathbf{f}$  satisfait (6).

# Plan

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange :

$$y(t^n + h) = y(t^n) + hy'(t^n) + \mathcal{O}(h^2)$$

La méthode d'**Euler progressive** est alors donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (7)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de  $y^{[n+1]}$  en fonction de  $y^{[n]}$ .

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange :

$$y(t^{n+1} - h) = y(t^{n+1}) - hy'(t^{n+1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (8)$$

Ce schéma est **implicite**, car  $y^{[n+1]}$  est défini implicitement en fonction de  $y^{[n]}$ . Il faut donc résoudre à chaque pas de temps une équation non-linéaire en utilisant des méthodes de point fixe par exemple.

## Exercice 6

On veut résoudre numériquement le problème  $(\mathcal{P})$  suivant : trouver  $y$  telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) = \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est  $y(t) = \sin(t) + t$ .

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{(n+1)} = y^{(n)} + hf(t^n, y^{(n)}), \\ y^{(0)} \quad \text{donné.} \end{cases}$$

**Q.1** Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème  $(\mathcal{P})$  en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre  $y^{(n)}$  et la fonction  $y$ , ...

**Q.2** Soit  $a, b$ ,  $a < b$  deux réels. Ecrire une fonction **DisREG** retournant une discrétisation de l'intervalle  $[a; b]$  avec  $N$  pas (constant) de discrétisation.

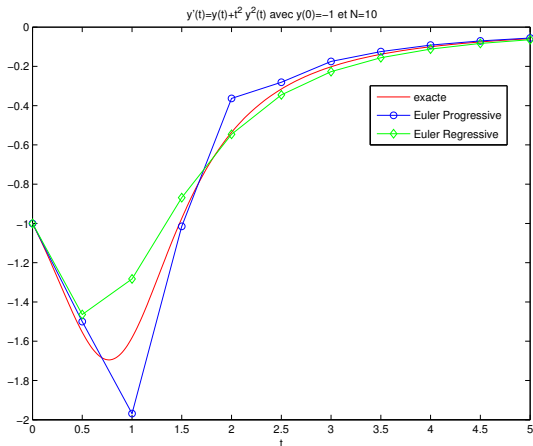
**Q.3** Ecrire une fonction **REDEP** retournant l'ensemble des couples  $(t^n, y^{(n)})$  calculés par le schéma d'Euler progressif.

**Q.4** Ecrire un algorithme complet de résolution de  $(\mathcal{P})$  par le schéma d'Euler progressif.

## Exemple d'E.D.O.

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 y^2(t), & \text{pour } t \in [0, 5], \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

a pour solution exacte  $y(t) = 1/(e^{-t} - t^2 + 2t - 2)$ .

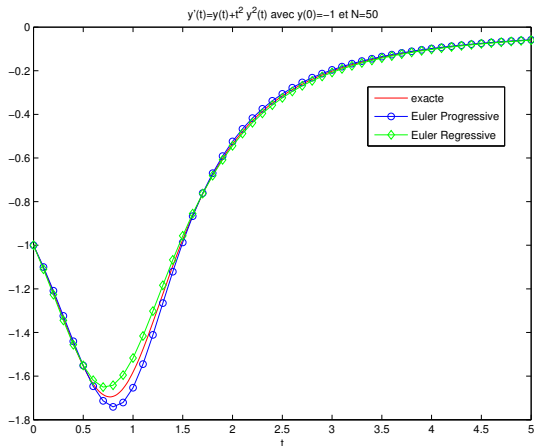




## Exemple d'E.D.O.

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 y^2(t), & \text{pour } t \in [0, 5], \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

a pour solution exacte  $y(t) = 1/(e^{-t} - t^2 + 2t - 2)$ .



- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$**
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + hf(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (9)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de  $\mathbf{y}^{[n+1]}$  en fonction de  $\mathbf{y}^{[n]}$ .

On veut résoudre le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (10)$$

Ce schéma est **implicite**, car  $\mathbf{y}^{[n+1]}$  est défini implicitement en fonction de  $\mathbf{y}^{[n]}$ .

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas**
  - Méthodes de Runge-Kutta
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

Soit  $\mathbf{y}$  la solution d'un problème de Cauchy et  $(t^n)_{n=0}^N$  la discrétisation régulière de l'intervalle  $[t^0, t^0 + T]$ .

### ♥ Définition 6.1: Méthodes à un pas

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (11)$$

Le schéma (11) converge sur l'intervalle  $[t^0, t^0 + T]$  si, pour la suite des  $\mathbf{y}^{[n]}$  calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas  $h$  diminue:

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \left\| \mathbf{y}^{[n]} - \mathbf{y}(t^n) \right\| = 0$$

Pour la méthode d'Euler progressif  $\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ .

## ♥ Definition 6.2: Consistance

Le schéma de calcul (11) est consistant avec le problème de Cauchy (4)-(5) si

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| = 0$$

Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.



## Théorème 2

Le schéma (11) est consistant avec le problème de Cauchy (4)-(5) si  $\Phi(t, \mathbf{y}, 0) = f(t, \mathbf{y})$ .

### Definition 6.3: Stabilité

La méthode est stable si une petite perturbation sur  $\mathbf{y}^{[0]}$  ou  $\Phi$  n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas  $h$ .

### Théorème 3

Si  $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$  vérifie la condition de Lipschitz en  $\mathbf{y}$  alors la méthode est stable.

### Théorème 4

Si la méthode est **stable et consistante**, alors elle **converge** pour n'importe quelle valeur initiale.



## ♥ Definition 6.4: Ordre d'un schéma

Le schéma (11) est d'ordre  $p$  si la solution  $\mathbf{y}$  du problème de Cauchy (4)-(5) vérifie

$$\max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\| = \mathcal{O}(h^p)$$

## Lemme 6.5

Soient  $\mathbf{y}$  la solution du problème de Cauchy (4)-(5). et  $(\mathbf{y}^{[n]})_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  donnés par un schéma à un pas (11) d'ordre  $p$  avec  $\mathbf{y}^{[0]} = \mathbf{y}(t^0)$ . On a alors

$$\max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\| \mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]} \right\| = \mathcal{O}(h^p) \quad (12)$$



## Proposition 6.6

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

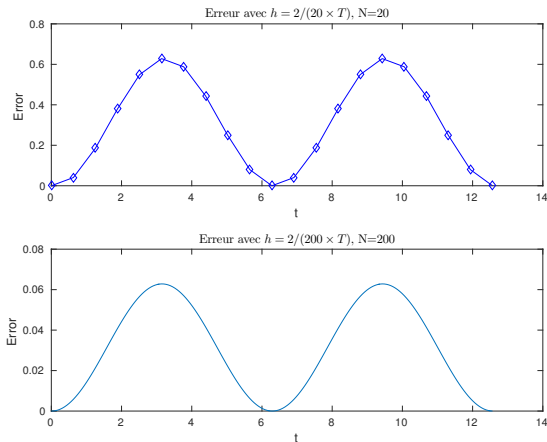


Figure: Méthode d'Euler progressive : vérification numérique de l'ordre



## Proposition 6.7

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

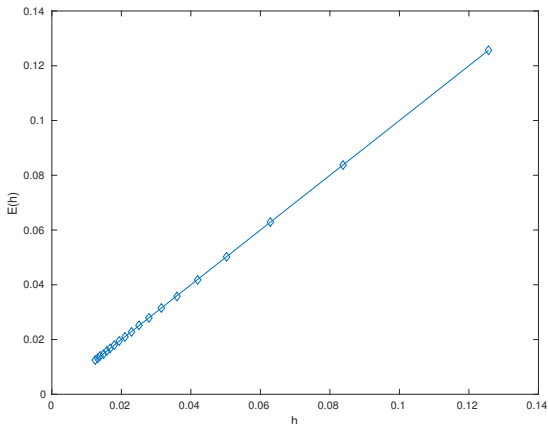


Figure: Méthode d'Euler progressive : vérification numérique de l'ordre

# Méthodes de Runge-Kutta



(a) *Carl Runge* 1856-1927, mathématicien et physicien allemand



(b) *Martin Wilhelm Kutta* 1867-1944, Mathématicien allemand



(c) *John C. Butcher* 1933, Mathématicien appliqué néozélandais

L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation  $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$  sur  $[t^n, t^{n+1}]$  et de calculer:

$$\mathbf{y}(t^{n+1}) = \mathbf{y}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt,$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à  $q$  points intermédiaires pour évaluer l'intégrale.

# Méthodes de Runge-Kutta

Ce sont des méthodes à un pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h)$$

avec

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

et

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left( t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (13)$$

avec  $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$  et  $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$



## Proposition 6.8: (admis)

- 1 Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si  $f$  est contractante en  $y$ .
- 2 Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{ij}.$$

- 3 Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1.$$

- 4 Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = 1/2.$$

- 5 Une méthode de Runge-Kutta est explicite si la matrice  $\mathbb{B}$  est triangulaire inférieure à diagonale nulle :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket, j \geq i, \quad b_{ij} = 0.$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1 - \alpha & \alpha \end{array} \quad (14)$$

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = (1 - \alpha)\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \alpha\mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2\alpha}, \mathbf{y} + \frac{h}{2\alpha}\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\right)$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ , **méthode de Heun** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

- $\alpha = 1$ , **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu**:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$



## Exercice 7

la méthode de Heun est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

**Q.1** Ecrire la fonction algorithmique **REDHEUNVEC** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus  $2N$  évaluation de  $\mathbf{f}$ .

**Q.2** Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.



# Application

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

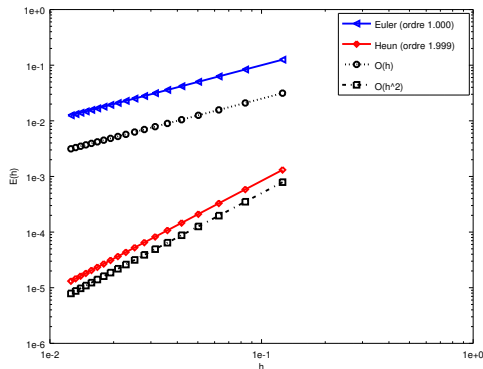


Figure: Méthode de Heun : vérification numérique de l'ordre

## Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Buchler suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \quad (15)$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned} \quad (16)$$



## Exercice 8

la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par

$$\begin{aligned}k_1^{[n]} &= f(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\k_2^{[n]} &= f\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_1^{[n]}\right) \\k_3^{[n]} &= f\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_2^{[n]}\right) \\k_4^{[n]} &= f\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + hk_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(k_1^{[n]} + 2k_2^{[n]} + 2k_3^{[n]} + k_4^{[n]}).\end{aligned}$$

**Q.1** Ecrire la fonction algorithmique `REDRK4VEC` permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

**Q.2** Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

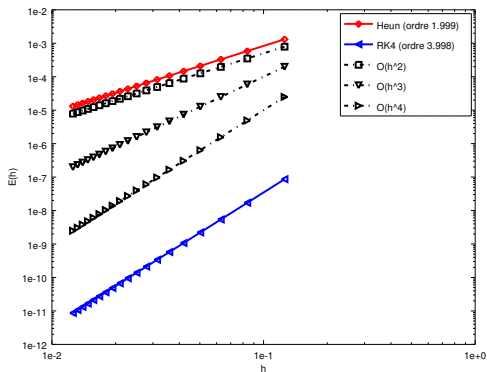


Figure: Méthode RK4 : vérification numérique de l'ordre

mais en prenant des  $h$  de plus en plus petits ...

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

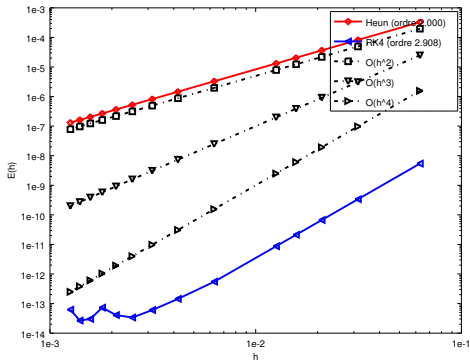


Figure: Méthode RK4 progressive : vérification numérique de l'ordre

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples**
  - Résultats théoriques
  - Méthodes d'Adams-Bashforth
  - Méthodes d'Adams-Moulton
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

Exemple d'une méthode à deux pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n-1]} + 2h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}). \quad (17)$$

Cette méthode est d'ordre 2.

### ♥ Definition 7.1: Méthodes à pas multiples

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^k \beta_i \mathbf{f}(t^{n+i}, \mathbf{y}^{[n+i]}) \quad (18)$$

où  $k$  est le nombre de pas,  $\alpha_k \neq 0$  et  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ .

Si  $\beta_k = 0$  le schéma est **explicite**, sinon il est **implicite**.

## ♥ Définition 7.2: ordre

Soit  $\mathbf{y}$  la solution d'un problème de Cauchy (4)-5 et  $\mathbf{y}^{[n+k]}$  le terme obtenu par le schéma (18) en prenant  $\mathbf{y}^{[n+i]} = \mathbf{y}(t^{n+i})$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \left\| \mathbf{y}(t^{n+k}) - \mathbf{y}^{[n+k]} \right\|_{\infty}.$$

Le schéma (18) est alors d'ordre  $p$  si

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

## 📖 Théorème 5: ordre schémas à pas multiples (admis)

Un schéma à pas multiples de type (18) est d'ordre  $p$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i i^q &= q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1}, \quad \forall q \in \llbracket 1, p \rrbracket. \end{aligned}$$





## Théorème 6: stabilité schémas à pas multiples (admis)

Soit une méthode à pas multiples donnée par (18). On note  $P$  le polynôme défini par

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i.$$

La méthode à pas multiples est **stable**, si

- 1 toutes les racines de  $P$  sont de module inférieur ou égal à 1,
- 2 une racine de module égal à 1 est une racine simple de  $P$ .



## Théorème 7: convergence (admis)

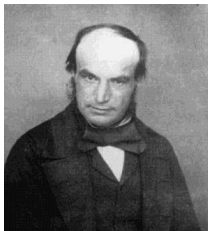
On suppose que les  $k$  valeurs initiales vérifient,

$$\|y(t^i) - y^{[i]}\| \leq C_0 h^p, \quad \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket.$$

Si le schéma (18) est **stable et d'ordre  $p$** , alors il est **convergent** d'ordre  $p$  :

$$\|y(t^n) - y^{[n]}\| \leq Ch^p, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

# Exemples de schémas à pas multiples



*John Couch Adams*  
1819-1892, mathématicien  
et astronome britannique



*Francis Bashforth*  
1819-1912, mathématicien  
appliqué britannique



(a) *Forest Ray Moulton*  
1872-1952, mathématicien  
et astronome américain

- Méthodes **explicites** d'Adams-Bashforth
- Méthodes **implicites** d'Adams-Moulton

# Méthodes explicites d'Adams-Bashforth

On note en abrégé  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 2 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left( 3\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right).$$

- Ordre 3 à 3 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left( 23\mathbf{f}^{[n]} - 16\mathbf{f}^{[n-1]} + 5\mathbf{f}^{[n-2]} \right).$$

- Ordre 4 à 4 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right).$$



## Exercice 9

La méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right). \quad (19)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

**Q.1** Ecrire la fonction algorithmique REDAB4Vec permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par cette méthode.

On note en abrégé  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 1 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left( \mathbf{f}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]} \right).$$

- Ordre 3 à 2 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left( 5\mathbf{f}^{[n+1]} + 8\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right).$$

- Ordre 4 à 3 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right).$$

# Plan

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction**
- 9 Application

Une méthode de prédiction-correction procède en deux étapes à chacune des itérations :

- **Prédiction** : on calcule une approximation de  $\mathbf{y}(t_{n+1})$  notée  $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$  à l'aide du **schéma explicite**
- **Correction** : on utilise le schéma implicite dans lequel les fonctions  $\mathbf{f}$  utilisant  $\mathbf{y}^{[n+1]}$  sont remplacées par les fonctions  $\mathbf{f}$  utilisant  $\bar{\mathbf{y}}^{[n+1]}$ .

## Exemple

Méthode d'Euler **explicite** pour **prédicteur** et méthode **implicite** des trapèzes comme **correcteur**.

Euler explicite :  $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$

Trapèze implicite :  $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}))$

On obtient :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) & \text{Prédiction} \\ \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \bar{\mathbf{y}}^{[n+1]})) & \text{Correction} \end{cases}$$





## Exercice 10

On pose  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . La méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

et la méthode de Adams-Moulton d'ordre 4 implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

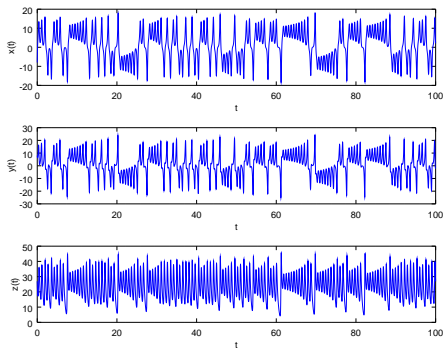
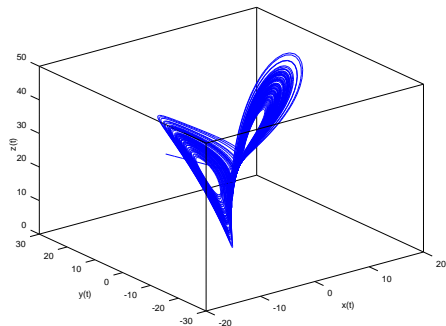
**Q.1** Ecrire la fonction algorithmique **REDPRECOR4VEC** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction  $\mathbf{f}$  dans la boucle principale.

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
- 7 Méthodes à pas multiples
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

# Application : modèle de Lorentz

$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)z(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3 - x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = \rho - 1.$



Comment reproduire ces graphiques?

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :  
 Trouver  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  solution de

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

où  $t^0 = 0$ ,  $T = 100$  et

$$\mathbf{f} : [0, 100] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \square) \longmapsto \mathbf{f}(t, \square) = \begin{pmatrix} -\sigma \square_1 + \sigma \square_2 \\ -\square_1 \square_3 + \rho \square_1 - \square_2 \\ \square_1 \square_2 - \beta \square_3 \end{pmatrix}$$

ou encore ...

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :

Trouver  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  solution de

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

où  $t^0 = 0$ ,  $T = 100$  et

$$\mathbf{f} : [0, 100] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \mathbf{z}) \longmapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -\sigma z_1 + \sigma z_2 \\ -z_1 z_3 + \rho z_1 - z_2 \\ z_1 z_2 - \beta z_3 \end{pmatrix}$$

```
function w=fLorentz(t,z,beta,rho,sigma)
% Fonction de Cauchy associee au ...
% modele de Lorentz
% beta, rho et sigma parametres ...
% physiques
w=[-sigma*z(1)+sigma*z(2); ...
-z(1)*z(3)+rho*z(1)-z(2); ...
z(1)*z(2)-beta*z(3)];
end
```

Listing 1: fonction de Cauchy : fichier fLorentz.m

```
clear all
close all

sigma=10;rho=28;beta=8/3;
fCauchy=@(t,z) ...
    fLorentz(t,z,beta,rho,sigma);

y0=[-8;8;rho-1];
[t,Y]=redRK4Vec(fCauchy,0,100,y0,10000);

figure(1)
plot3(Y(1,:),Y(2,:),Y(3,:))
xlabel('x(t)'),ylabel('y(t)'),zlabel('z(t)')
print -dpdf fig01-Lorentz.pdf

figure(2)
subplot(3,1,1)
plot(t,Y(1,:));
xlabel('t'),ylabel('x(t)')
subplot(3,1,2)
plot(t,Y(2,:));
xlabel('t'),ylabel('y(t)')
subplot(3,1,3)
plot(t,Y(3,:));
xlabel('t'),ylabel('z(t)')
print -dpdf fig02-Lorentz.pdf
```

Listing 2: Résolution du modèle de Lorentz : script prgLorentz.m

# Partie IV

## Résolution numérique des E.D.P.

10 ...