

Exercice

Q. 1 Soit $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_P^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_R^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_P^n)$$

et

$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_R^n)$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leq C_1 h, \quad \text{avec } C_1 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

et

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^R| \leq C_2 h, \quad \text{avec } C_2 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

Q. 2 Soit $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1^n \in]t^n, t^{n+1}[$ et $\eta_2^n \in]t^{n-1}, t^n[$ tels que

$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

2. En déduire que

$$|y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leq E h^2, \quad \text{avec } E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|$$

Correction Exercice

Q. 1 1. Soit $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, on a

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}.$$

D'après la formule de Taylor, il existe $\eta_P^n \in [t^n, t^{n+1}]$ tel que

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(\eta_P^n) \quad (\text{P-1})$$

d'où

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2!} y^{(2)}(\eta_P^n). \quad (\text{P-2})$$

On a

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}.$$

D'après la formule de Taylor, il existe $\eta_R^n \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$y(t^n) = y(t^{n-1}) + h y^{(1)}(t^{n-1}) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(\eta_R^n) \quad (\text{P-3})$$

d'où

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} = y^{(1)}(t^{n-1}) + \frac{h}{2} y^{(2)}(\eta_R^n) \quad (\text{P-4})$$

2. Soit $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, comme $\eta_P^n \in [t^n, t^{n+1}]$ on a

$$|y^{(2)}(\eta_P^n)| \leq \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|$$

d'où, en utilisant (P-2),

$$|(Dy)_n^P - y^{(1)}(t^n)| = \frac{h}{2} |y^{(2)}(\eta_P^n)| \leq \frac{h}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |y^{(2)}(t)|.$$

De même, comme $\eta_R^n \in [t^{n-1}, t^n]$ on a

$$|y^{(2)}(\eta_R^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|$$

d'où, en utilisant (P-4),

$$|(Dy)_n^R - y^{(1)}(t^n)| = \frac{h}{2} |y^{(2)}(\eta_R^n)| \leq \frac{h}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |y^{(2)}(t)|.$$

Q. 2 1. Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on a

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}.$$

D'après la formule de Taylor, il existe $\eta_1^n \in [t^n, t^{n+1}]$ et $\eta_2^n \in [t^{n-1}, t^n]$ tels que

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(t^n) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\eta_1^n) \quad (\text{P-5})$$

et

$$y(t^{n-1}) = y(t^n) - h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(t^n) - \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\eta_2^n) \quad (\text{P-6})$$

En soustrayant (P-6) à (P-5), on obtient

$$y(t^{n+1}) - y(t^{n-1}) = 2h y^{(1)}(t^n) + \frac{h^3}{6} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

d'où

$$y^{(1)}(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} - \frac{h^2}{12} (y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n)).$$

2. Comme $\eta_1^n \in [t^n, t^{n+1}] \subset [t^{n-1}, t^{n+1}]$, on en déduit que

$$|y^{(3)}(\eta_1^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|.$$

De même, comme $\eta_2^n \in [t^{n-1}, t^n] \subset [t^{n-1}, t^{n+1}]$ on a

$$|y^{(3)}(\eta_2^n)| \leq \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |y^{(3)}(t)|.$$

