TRAVAUX DIRIGÉS - ALGORITHMIQUE/DÉRIVATION[1]

# 1 Algorithmique

## EXERCICE 1

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2 * k * x)$$

## EXERCICE 2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^{k} sin(2 * k * z/n)^k$$

## EXERCICE 3

**Q. 1** *Reprendre les exercices précédents en utilisant les boucles «tant que».*

**Q. 2** *Reprendre les exercices précédents en écrivant "au mieux" une fonction pour chacun d'entre eux.*

## EXERCICE 4

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right\}.$$

Ecrire la fonction `SFT` permettant de calculer $x_n(t)$.

## EXERCICE 5

Soient $x$ un réel, $m, n, p, q$ des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.
Le réel $y$ est donné par

$$y = \prod_{i=1}^{m}\left((x + \sin(u_i))\sum_{k=1}^{n}(k + (x-i)^2)\right)$$

**Q. 1** **(a)** *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $y$? Préciser les types et les dimensions.*

**(b)** *Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer $y$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

**(c)** *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^{p}\left((u_i - k\sin(x))\prod_{j=1}^{p}(v_k + (x-j)^2)\right), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

**Q. 2** **(a)** *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $\boldsymbol{z}$? Préciser les types et les dimensions.*

[1] Les énoncés sont parfois intentionnellement flous!

(b) *Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer $\boldsymbol{z}$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

(c) *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

## Exercice 6

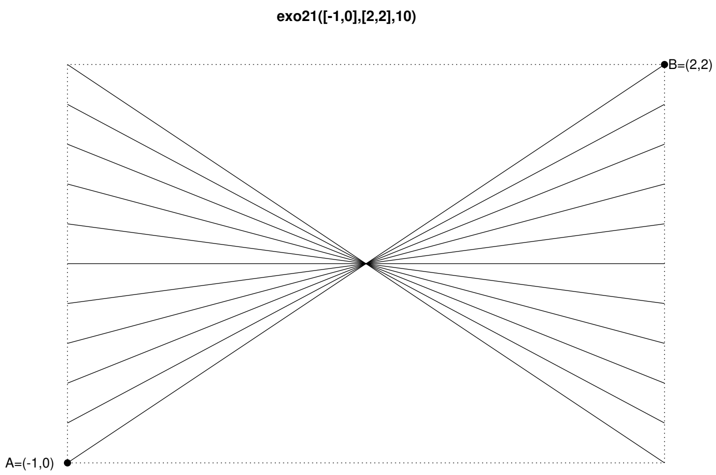
**Q. 1** *Ecrire une fonction* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ en $n + 1$ points.*

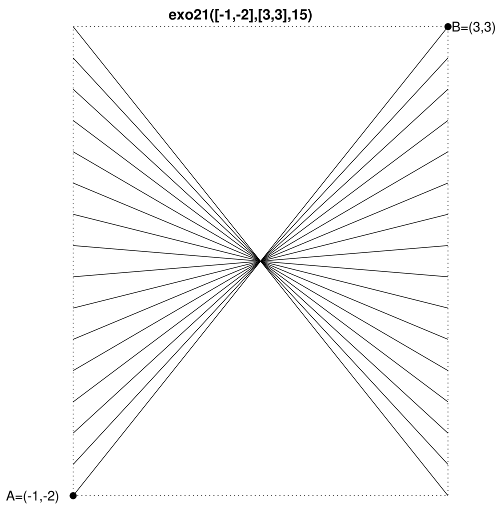
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets $A$, $(x_B, y_A)$, $B$ et $(x_A, y_B)$.
On suppose que pour tracer un trait entre les points $A$ et $B$, on dispose de la commande `plot(`$[x_A, x_B]$`,`$[y_A, y_B]$`)`.

**Q. 2** *Ecrire une fonction* `exo21` *de paramètres $A$, $B$ et $n$ permettant de*

- *représenter les bords du rectangle,*
- *relier les points des bords gauche et droit, dont les ordonnées sont une discrétisation régulière en $n+1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.*

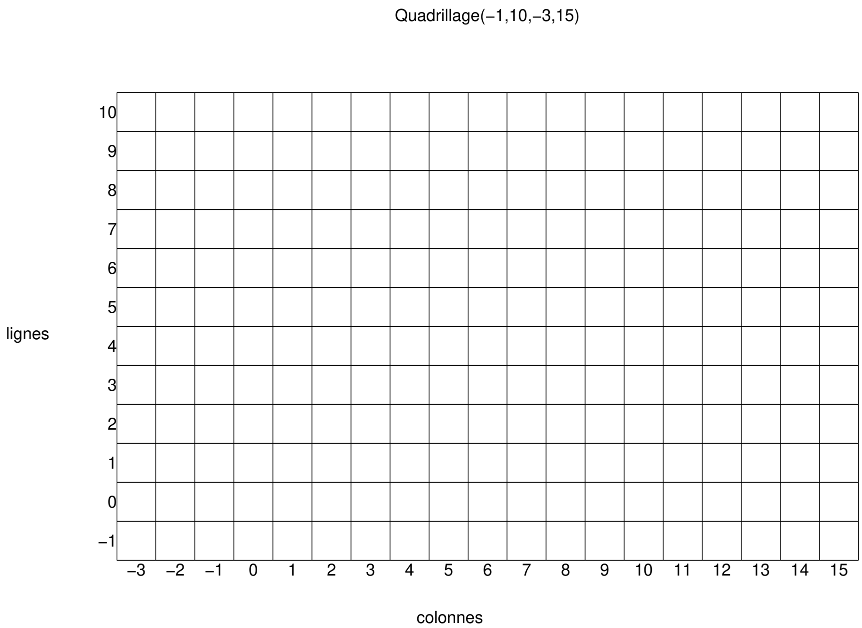
*Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :*



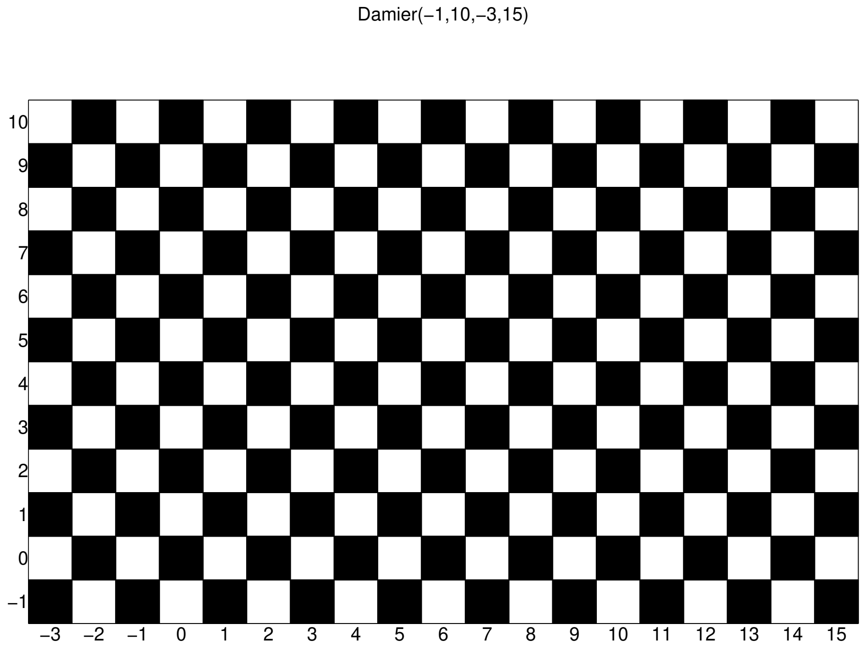

## Exercice 7

On dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation



On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne $i$ et colonne $j$ d'un quadrillage.

**Q. 1** *Ecrire une fonction* `Damier` *permettant de créer un damier quelconque sachant que le pavé en bas à gauche d'un quadrillage doit toujours être noir. Voici une représentation pour le quadrillage précédent :*




## 2 Dérivation numérique

**Exercice 8**

**Q. 1** *Soit* $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$.

1. *Montrer qu'il existe* $\eta_P^n \in ]t^n, t^{n+1}[$ *et* $\eta_R^n \in ]t^{n-1}, t^n[$ *tels que*

$$(Dy)_n^P = y^{(1)}(t^n) + \frac{h}{2}\, y^{(2)}(\eta_P^n)$$

*et*

$$(Dy)_n^R = y^{(1)}(t^n) - \frac{h}{2}\, y^{(2)}(\eta_R^n)$$

2. *En déduire que*

$$|\, y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^P| \leqslant C_1 h, \quad \textit{avec} \;\; C_1 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |\, y^{(2)}(t)|$$

*et*

$$|y'(t^n) - (Dy)_n^R| \leqslant C_2 h, \quad \textit{avec } C_2 = \frac{1}{2} \max_{t \in [t^{n-1}, t^n]} |\, y^{(2)}(t)|$$

**Q. 2** *Soit* $y \in \mathcal{C}^3([a,b])$.

1. *Montrer qu'il existe* $\eta_1^n \in ]t^n, t^{n+1}[$ *et* $\eta_2^n \in ]t^{n-1}, t^n[$ *tels que*

$$(Dy)_n^C = y^{(1)}(t^n) - \frac{h^2}{12}(y^{(3)}(\eta_1^n) + y^{(3)}(\eta_2^n))$$

2. *En déduire que*

$$|\, y^{(1)}(t^n) - (Dy)_n^C| \leqslant E h^2, \quad \textit{avec} \;\; E = \frac{1}{6} \max_{t \in [t^{n-1}, t^{n+1}]} |\, y^{(3)}(t)|$$

## Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$. On note $t^n$, $n \in [\![0,N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ de pas $h$. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$.

**Q. 1** **(a)** *Déterminer en fonction de $h$ et $\boldsymbol{F}$, un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N]\!].$$

**(b)** *Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédant.*

**Q. 2** **(a)** *Connaissant uniquement le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![0,N]\!]$$

**(b)** *Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédant.*