

TRAVAUX PRATIQUES - E.D.P.

Groupe 1
1ère partie : EDP stationnaire

Travail individuel et personnel

Table des matières

1 Différences finies 1D	1
1.1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet	1
1.2 Problème modèle Neumann/Dirichlet	2
1.2.1 Neumann ordre 1	3
1.2.2 Neumann ordre 2	3

1 Différences finies 1D

1.1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\tag{1.1}$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Par exemple, on peut prendre comme jeu de données $a = -1$, $b = \pi$, $f(x) = -9 \cos(3x - 2) + 4 \sin(2x)$, $u_a = -\cos(5) - \sin(2)$ et $u_b = -\cos(3\pi - 2)$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = -\cos(3x - 2) + \sin(2x)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 Ecrire une fonction `Lap1D` (fichier `Lap1D.m`) permettant de générer cette matrice et un petit programme (fichier `prg0.m`) permettant de la tester/valider rapidement. ■

Le programme fourni sur le serveur Discord (fichier `Edp0.m`), utilisant la fonction précédente, permet de résoudre numériquement le problème (1.1)-(1.2)-(1.3) par un schéma différences finies d'ordre 2. Ce programme va afficher la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.

Dans ce programme, la variable `x` contient l'ensemble des x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ définie par

$$x_i = a + ih, \text{ avec } h = (b - a)/N.$$

Q. 2 Ecrire le programme `OrdreEdp0` (fichier `OrdreEDP0.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 1. ■

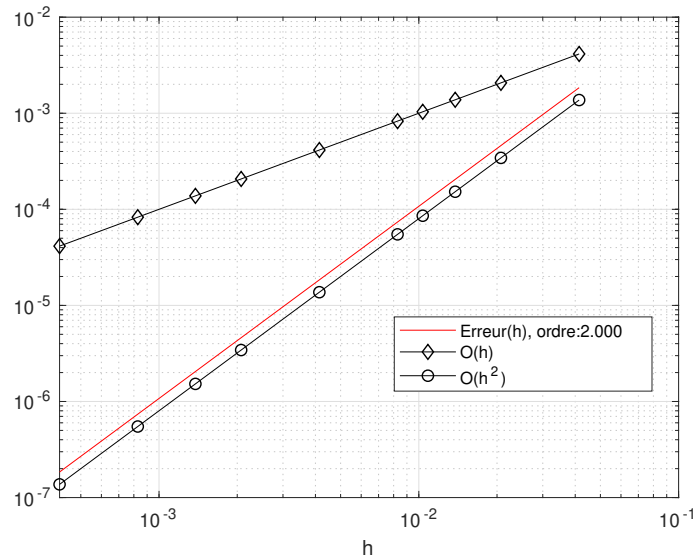


FIGURE 1 – Représentation de l'erreur en fonction de h

Q. 3 1. Ecrire le programme `Edp1` (fichier `Edp1.m`) permettant de calculer une solution approchée de :

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\quad (1.4)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

avec $\nu \geq 0$. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera la solution approchée ainsi que la solution exacte.

2. Ecrire le programme `OrdreEdp1` (fichier `OrdreEDP1.m`) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement. ■

A faire en 1h00 (temps indicatif)

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-part1-Q1aQ3` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q1 à Q3. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **objet** "`<NOM> TP2 part1 Q1 a Q3`" et y joindre l'archive.

1.2 Problème modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\quad (1.7)$$

$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

Par exemple, on peut prendre comme jeu de données $a = -1$, $b = 2$, $f(x) = 9 \cos(3x) + 2$, $v_a = 3 \sin(3) + 2$ et $u_b = \cos(6) - 4$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = -x^2 + \cos(3x)$.

1.2.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Q. 4 *Ecrire le programme `Edp2` (fichier `Edp2.m`) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.* ■

Q. 5 *Ecrire le programme `OrdreEdp2` (fichier `OrdreEDP2.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

1.2.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

Q. 6 *Ecrire le programme `Edp3` (fichier `Edp3.m`) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.* ■

Q. 7 *Ecrire le programme `OrdreEdp3` (fichier `OrdreEDP3.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

— A faire en 2h00 (temps indicatif) —

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-part1-Q4aQ7` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q4 à Q7. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **objet** "`<NOM> TP2 part1 Q4 a Q7`" et y joindre l'archive.