

TRAVAUX PRATIQUES - E.D.P.

Groupe 1  
2ème partie : EDP instationnaire

**Travail individuel et personnel**

## 1 Les Différences Finies pour l'équation de la chaleur

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + c(x)u(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in ]t_0; t_0 + T[ \times ]a; b[, \quad (1.1)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in ]a; b[, \quad (1.2)$$

$$u(t, a) = u_a(t), \quad \forall t \in [t_0; t_0 + T], \quad (1.3)$$

$$u(t, b) = u_b(t), \quad \forall t \in [t_0; t_0 + T]. \quad (1.4)$$

avec  $\nu$  un réel strictement positif,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$  et  $c$  une fonction positive.

On note  $t^n$ ,  $n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$  et  $x_i$ ,  $i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$  les discrétisations régulières des intervalles  $[t_0; t_0 + T]$  et  $[a; b]$  avec  $N_t$  pas de discrétisation en temps et  $N_x$  pas de discrétisation en espace.

On souhaite implémenter deux schémas de résolution de cette E.D.P. :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + c_i u_i^{n+1} = f_i^{n+1}. \quad (1.5)$$

et

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + c_i u_i^n = f_i^n. \quad (1.6)$$

où  $\Delta t = T/N_t$ ,  $\Delta x = (b - a)/N_x$ ,  $f_i^n = f(t^n, x_i)$ ,  $c_i = c(x_i)$  et  $u_i^n \approx u(t^n, x_i)$ .

On rappelle que le premier schéma est le **schéma d'Euler implicite** et le second le **schéma d'Euler explicite**. Le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable et le schéma d'Euler explicite est stable sous la condition de C.F.L.

$$\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

On note,  $\forall n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ ,  $\mathbf{U}^n$  les vecteurs de dimension  $N_x + 1$ , de composantes  $U_i^n = u_{i-1}^n$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$ . On étudie cette E.D.P. avec les données  $t_0 = 0$ ,  $T = 2$ ,  $a = -\frac{1}{2}\pi$ ,  $b = \pi$ ,  $\nu = 3$ ,  $k = 4$

$$\begin{aligned} c(x) &= 2x^2 + 1, \\ f(t, x) &= (2x^2 + 1) \cos(4t) \sin(x) + 3 \cos(4t) \sin(x) - 4 \sin(4t) \sin(x), \\ u_0(x) &= \sin(x), \\ u_a(t) &= -\cos(4t), \\ u_b(t) &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte est donnée par  $u_{\text{ex}}(t, x) = \cos(4t) \sin(x)$ .

**Q. 1** Pour résoudre l'E.D.P. par un schéma d'**Euler implicite**, le programme `mainChaleurImplicite.m` (script Matlab) est fourni, ainsi que les fonctions `CalculF.m`, `NormInf.m` et `PlotSol.m` dans l'archive déposée avec ce sujet sur le serveur Discord ou `CodesEDPchaleur.tar.gz`

Il manque le fichier `EulerImplicite.m` correspondant à la fonction :

```
[t, x, u] = EulerImplicite(EDP, Nt, Nx)
```

résolvant l'E.D.P. par un schéma d'Euler implicite avec

- **EDP** : structure, définie dans `mainChaleurImplicite.m`, contenant l'ensemble des données de l'E.D.P. à résoudre.
- **Nt** : nombre de pas de discrétisation en temps,
- **Nx** : nombre de pas de discrétisation en espace,
- **t** : discrétisation en temps (dimension  $Nt+1$ ),
- **x** : discrétisation en espace (dimension  $Nx+1$ ),
- **u** :  $u(i,n)$  solution approchée au temps  $t(n)$  et point  $x(i)$  (dimension  $(Nx+1, Nt+1)$ ),

Ecrire la fonction `EulerImplicite`. ■

**Q. 2** 1. Pour résoudre l'E.D.P. par un schéma d'**Euler explicite**, le programme `mainChaleurExplicite` (script Matlab) est fourni, ainsi que les fonctions `CalculF.m`, `NormInf.m` et `PlotSol.m` (voir lien de la question précédente).

Il manque le fichier `EulerExplicite.m` correspondant à la fonction :

```
[t, x, u] = EulerExplicite(EDP, Nt, Nx)
```

résolvant l'E.D.P. par un schéma d'Euler explicite. Les paramètres sont identiques à ceux de la fonction `EulerImplicite`.

Ecrire la fonction `EulerExplicite`.

2. Dans le programme `mainChaleurExplicite`, changer le paramètre `Nt` de 2900 à 2800. Que se passe-t-il lors de la résolution ? ■

Comme première application, résoudre numériquement par le schéma implicite d'Euler le problème de conduction thermique dans une barre de longueur  $L = 6$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in ]0; T[ \times ]0; L[, \quad (1.7)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [0; L], \quad (1.8)$$

$$u(t, 0) = u_g(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (1.9)$$

$$u(t, L) = u_d(t), \quad \forall t \in [0; T]. \quad (1.10)$$

avec  $T = 10$ ,  $u_0(x) = 100$ ,  $\forall x \in [0, L]$

$$u_g(t) = \begin{cases} 100 - 90t, & \forall t \in [0, 1] \\ 10, & \forall t > 1 \end{cases}$$

$$u_d(t) = \begin{cases} 100 - 80t, & \forall t \in [0, 1] \\ 20, & \forall t > 1 \end{cases}$$

**Q. 3** 1. Ecrire le programme `Q3main.m` permettant de résoudre ce problème par le **schéma d'Euler implicite**.

2. Exécuter ce programme pour différentes valeurs de  $\nu$  (par exemple  $\nu = 0.1$ ,  $\nu = 1$  et  $\nu = 10$ ). Qu'observe-t'on ? ■

Pour la seconde application, la seule modification par rapport à l'application précédente est que la conductivité thermique est une fonction constante par morceaux en espace :

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in [0, \frac{L}{3}] \\ 0.1 & \forall x \in ]\frac{L}{3}, \frac{2L}{3}] \\ 1 & \forall x \in ]\frac{2L}{3}, L]. \end{cases}$$

**Q. 4** *Ecrire le programme `Q4main.m` permettant de résoudre ce problème par le schéma d'Euler implicite.* ■

— **A faire en 3h00 (temps indicatif)** —

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-part2-Q1 à Q4` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q1 à Q4. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ M'envoyer cette archive par mail avec pour **objet** "`<NOM> TP2 part2 Q1a4`".