

TRAVAUX PRATIQUES - E.D.P.

Groupe 2
1ère partie : EDP stationnaire

Travail individuel et personnel

Table des matières

1 Différences finies 1D	1
1.1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet	1
1.2 Problème modèle Neumann/Dirichlet	2
1.2.1 Neumann ordre 1	3
1.2.2 Neumann ordre 2	3

1 Différences finies 1D

1.1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\tag{1.1}$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Par exemple, on peut prendre comme jeu de données $a = -\pi$, $b = 1$, $f(x) = 4 \cos(2x) - 9 \sin(3x - 2)$, $u_a = \sin(3\pi + 2) + 1$ et $u_b = \cos(2) - \sin(1)$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(2x) - \sin(3x - 2)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Ecrire une fonction `Lap1D` (fichier `Lap1D.m`) permettant de générer cette matrice et un petit programme (fichier `prg0.m`) permettant de la tester/valider rapidement.* ■

Le programme fourni sur le serveur Discord (fichier `Edp0.m`), utilisant la fonction `Lap1D` que vous venez d'écrire, permet de résoudre numériquement le problème (1.1)-(1.2)-(1.3) par un schéma différences finies d'ordre 2. Ce programme va afficher la solution numérique obtenue et la solution exacte en *Figure 1* et l'erreur en *Figure 2*.

Dans ce programme, la variable `x` contient l'ensemble des x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ définie par

$$x_i = a + ih, \text{ avec } h = (b - a)/N.$$

Q. 2 Ecrire le programme `OrdreEdp0` (fichier `OrdreEDP0.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 1. ■

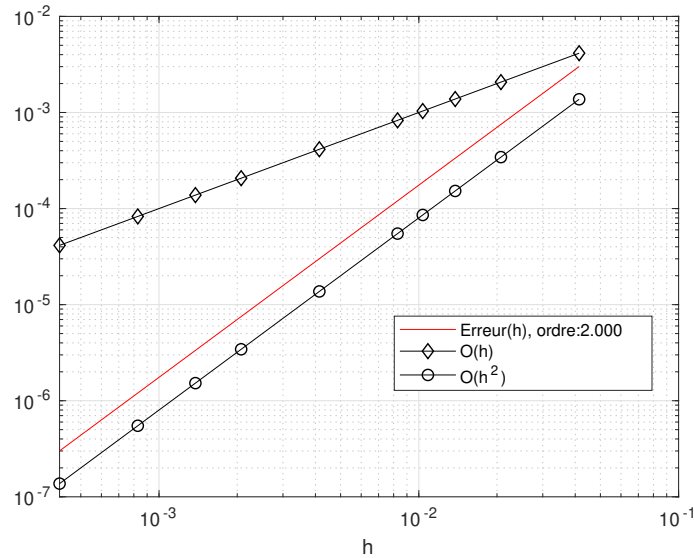


FIGURE 1 – Représentation de l'erreur en fonction de h

Q. 3 1. Ecrire le programme `Edp1` (fichier `Edp1.m`) permettant de calculer une solution approchée de :

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\quad (1.4)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

avec $\nu \geq 0$. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera la solution approchée ainsi que la solution exacte.

2. Ecrire le programme `OrdreEdp1` (fichier `OrdreEDP1.m`) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement. ■

A faire en 1h00 (temps indicatif)

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-part1-Q1aQ3` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q1 à Q3. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **objet** "`<NOM> TP2 part1 Q1 a Q3`" et y joindre l'archive.

1.2 Problème modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\quad (1.7)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

$$u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

Par exemple, on peut prendre comme jeu de données $a = -1$, $b = \frac{1}{3}\pi$, $f(x) = 9 \sin(3x) + 2$, $u_a = -\sin(3) - 4$ et $v_b = -\frac{2}{3}\pi - 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = -(x-1)^2 + \sin(3x)$.

1.2.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (1.8), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(b)-u(b-h)}{h}$

Q. 4 Ecrire le programme `Edp2` (fichier `Edp2.m`) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. ■

Q. 5 Ecrire le programme `OrdreEdp2` (fichier `OrdreEDP2.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

1.2.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (1.9), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 2 par $\frac{u(b-2h)-4u(b-h)+3u(b)}{2h}$

Q. 6 Ecrire le programme `Edp3` (fichier `Edp3.m`) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. ■

Q. 7 Ecrire le programme `OrdreEdp3` (fichier `OrdreEDP3.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

— A faire en 2h00 (temps indicatif) —

- ◇ Créer une archive compressée nommée `<NOM>-TP2-part1-Q4aQ7` contenant l'ensemble des fichiers nécessaires à l'exécution des programmes demandés en Q4 à Q7. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom.
- ◇ Envoyer cette archive par mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` avec pour **objet** "`<NOM> TP2 part1 Q4 a Q7`".