EXAMEN DU 27 FÉVRIER 2013

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

EXERCICE 1 : 12 points

Q. 1 1. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

2. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*
3. *Que cherche-t'on?* ▪

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) - ty^{(2)}(t) + (1-t)y^{(1)}(t) + sin(t) &= 0, \ t \in]t_0, t_0+T], && (1)\\ y(t_0) &= 3, && (2)\\ y^{(1)}(t_0) &= 1, && (3)\\ y^{(2)}(t_0) &= -1. && (4) \end{aligned}$$

avec $t_0 = 0$ et $T = 2\pi$. Ici, $y^{(n)}(t)$ note la dérivée n-ième de la fonction y en t.

Q. 2 1. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O. précédente.* ▪

Q. 3 *Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose $y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ (4 fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}$).*

1. *Rappeler les développements de Taylor de $y(t+h)$ et $y(t-h)$.*
2. *En déduire trois approximations de $y'(t)$, deux à l'ordre 1 et une à l'ordre 2.*
3. *Déduire d'une des trois approximations précédentes, un schéma numérique explicite pour l'approximation d'un problème de Cauchy.* ▪

On rappelle le schéma d'Euler progressif d'ordre 1 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} &= \boldsymbol{y}^{[n]} + hf(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & \text{donné.} \end{cases}$$

Q. 4 1. *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre l'E.D.O.* (1)-(4) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

2. *Donner une relation entre $\boldsymbol{y}^{[n]}$ et la fonction y du problème* (1)-(4) ▪

Q. 5 (algorithmique) *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DISREG *retournant les points t^n, $t^0 = a < t^1 < \ldots < t^N = b$, points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant).* ▪

Q. 6 (algorithmique) *Ecrire une fonction* EULERP *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel).* ▪

Q. 7 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (1)-(4) *par le schéma d'Euler progressif en utilisant au maximum les fonctions déjà écrites.* ▪

On rappelle le schéma d'Euler régressif pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + hf(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{cases}$$

Q. 8 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant les schémas d'Euler progressif et regressif.* ▪

Q. 9 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PreCorVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par la méthode de prédiction-correction précédente.* ▪

Q. 10 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (1)-(4) *par la méthode de prédiction-correction précédente.* ▪

Exercice 2 : 8 points

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.

Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 4 :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1

1. *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 4 associé au tableau de Butcher (3).*
2. *Expliquer de manière détaillée l'utilisation de ce schéma pour la résolution d'un problème de Cauchy.* ▪

Q. 2 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RED4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma d'ordre 4 précédent.* ▪

Q. 3 (Matlab) *Ecrire la fonction Matlab* RED4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma d'ordre 4 précédent.* ▪

Application : On considère deux blocs de masses respectives m_1 et m_2 liés l'un à l'autre par un ressort de constante de raideur k_2. Le bloc de masse m_1 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1 et, à l'autre extrémité du système, le bloc de masse m_2 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_3.

La masse des ressorts est négligeable et on suppose que l'amplitude de déplacement des deux blocs est toujours suffisamment faible pour que la loi de Hooke soit vérifiée. Finalement, tous les frottements sont considérés comme négligeables.

Le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps est donnée par

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}(t) &= -(k_1+k_2)x_1(t) + k_2x_2(t) \quad (4) \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}(t) &= k_2x_1(t) - (k_2+k_3)x_2(t). \quad (5) \end{aligned}$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les déplacements respectifs des blocs m_1 et m_2 par rapport à leur position d'équilibre au cours du temps (voir figure 2).

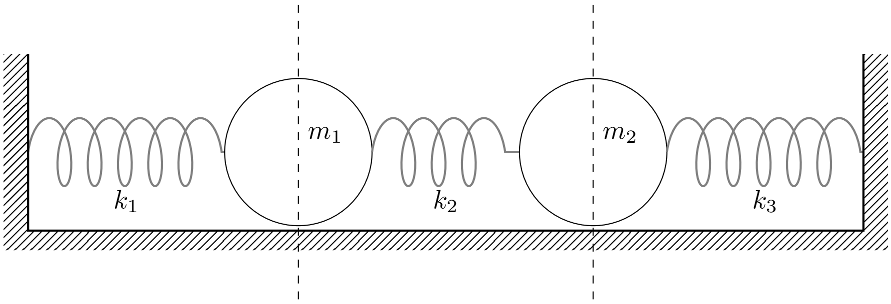

Figure 1: Positions d'équilibre

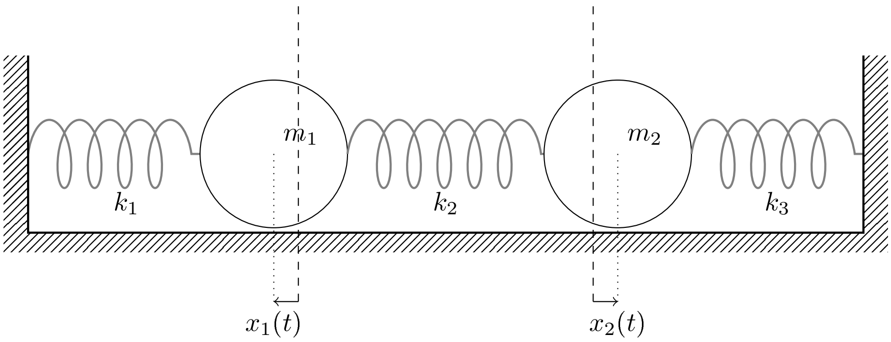

Figure 2: En mouvement

On souhaite résoudre numériquement ce problème pour le cas où :

- le bloc de masse m_1 est en position -0.5 par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial $t = 0$,
- le bloc de masse m_2 est en position $+0.5$ par rapport à sa position d'équilibre et à une vitesse nulle à l'instant initial.

Q. 4 *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy vectoriel associé à ce problème.* ▪

Q. 5 (Matlab) *Ecrire un programme permettant de résoudre ce problème de Cauchy par le schéma d'ordre 4 précédent et de représenter les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (Utiliser au maximum les fonctions).* ▪