Energétique 1ère année **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2013-2014**

Examen du 12 février 2014

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

Le barème est donné à titre indicatif.

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$y^{(3)}(t) - ty^{(2)}(t) + ty(t)y^{(1)}(t) + sin(t) = 0, \ t \in]t_0, t_0 + T], \tag{0.1}$$

$$y(t_0) = 0, \tag{0.2}$$

$$y^{(1)}(t_0) = 2, \tag{0.3}$$

$$y^{(2)}(t_0) = 1. \tag{0.4}$$

avec $t_0 = 0$ et $T = 2\pi$. Ici, $y^{(n)}(t)$ note la dérivée n-ième de la fonction y en t.

Exercice 1 : 12.5 points

Q. 1 (1.pt) *1. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

2. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy ***vectoriel****?*

3. Que cherche-t'on? ■

Q. 2 (1.25pts) *1. Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O. (0.1)-(0.2)-(0.3)-(0.4). ■

Q. 3 (2.5pts) *Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (2 fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}$).*

1. *Rappeler les développements de Taylor de $y(t+h)$ et $y(t-h)$ et en déduire deux approximations de $y'(t)$ d'ordre* 1.
2. *En supposant $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, déterminer une approximation de $y'(t)$ d'ordre* 2.
3. *Déduire d'une des trois approximations précédentes, un schéma numérique explicite pour l'approximation d'un problème de Cauchy.* ■

On rappelle le schéma d'Euler progressif d'ordre 1 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + hf(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Q. 4 (1.25pts) *1. Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre l'E.D.O.* (0.1)-(0.4) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

2. Donner une relation entre $\boldsymbol{y}^{[n]}$ et la fonction y du problème (0.1)-(0.4) ■

Q. 5 (0.5pt - algorithmique) *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant les points t^n, $t^0 = a < t^1 < \ldots < t^N = b$, points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant).* ■

Q. 6 (1pt - algorithmique) *Ecrire une fonction* EulerP *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n]})$ calculés par le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel).* ■

Q. 7 (1pt - algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (0.1)-(0.4) *par le schéma d'Euler progressif en utilisant au maximum les fonctions déjà écrites.* ▪

On rappelle le schéma d'Euler régressif pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + hf(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right.$$

Q. 8 (1.5pts) *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant les schémas d'Euler progressif et regressif.* ▪

Q. 9 (1.5pts - algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PRECORVEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par la méthode de prédiction-correction précédente.* ▪

Q. 10 (1pt - algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (0.1)-(0.4) *par la méthode de prédiction-correction précédente.* ▪

EXERCICE 2 : 8.5 points

De manière générale, un schéma a un pas pour la résolution d'un problème de Cauchy c'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{2.1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) \tag{2.2}$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q \tag{2.3}$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2.4}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.

Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 : le tableau de Butcher associé s'écrit

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \tag{2.5}$$

Q. 1 (1.pt) *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 associé au tableau de Butcher (2.5).* ▪

Q. 2 (2pts - algorithmique) *Ecrire la fonction* REDRK4VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel $m > 1$) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en précisant les données et le(s) résultat(s) associés.* ▪

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 3** est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right) \tag{2.6}$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 3** par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right) \tag{2.7}$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 3 (2.5pts) *1. Les schémas* (2.6) *et* (2.7)*, sont-ils explicites ou implicites?*

2. Les schémas (2.6) *et* (2.7) *sont à pas multiples. Quel est le nombre de pas?*

3. Expliquer le principe d'une méthode à pas multiples utilisant le schéma (2.6). ■

Q. 4 (2pts - algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDAB3Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (2.6) *en précisant les données et le(s) résultat(s) associés.* ■

Q. 5 (1pts - algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (0.1)-(0.4) *par le schéma* (2.6). ■