Energétique 1ère année **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2017-2018**

EXAMEN DU 13 FÉVRIER 2018
durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Tous les calculs doivent être justifiés

EXERCICE 1 : dérivation 3 points

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0,N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ avec $t^0 = a$ et $t^N = b$. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$.

Q. 1 1. *Donner une formule permettant de calculer l'ensemble des points t^n.*

2. *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant de retourner l'ensemble des points t^n.* □

Q. 2 1. *Donner les formules de Taylor en $t \in]a,b[$ de $f(t+h)$ et $f(t-h)$ avec $h > 0$ tel que $t+h$ et $t-h$ appartiennent à l'intervalle $[a,b]$.*

2. *En déduire des formules permettant de calculer en fonction de h et $\boldsymbol{F}$, le vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N]\!].$$

3. *Ecrire une fonction algorithmique permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédent.* □

EXERCICE 2 : 10 points

Q. 1 1. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy **vectoriel**.*

3. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy **vectoriel**?*

4. *Que cherche-t'on?* □

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$w^{(4)}(t) - tw^{(2)}(t) + \cos(t)w(t) = \sin(t), \quad \forall t \in]0,10], \tag{1}$$
$$w(0) = 0, \quad w^{(1)}(0) = -1, \quad w^{(2)}(0) = 2, \quad w^{(3)}(0) = 1 \tag{2}$$

Ici, $w^{(n)}(t)$ note la dérivée n-ième de la fonction w en t.

Q. 2 *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O.* (1)-(2). □

Le schéma de Heun d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left[f(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + f\left(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + hf(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right)\right]. \tag{3}$$

Q. 3 1. *Expliquer en détail comment utiliser ce schéma pour résoudre l'E.D.O.* (1)-(2) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

2. *Donner une relation entre $\boldsymbol{y}^{[n]}$ et la fonction w solution du problème de* (1)-(2). □

Q. 4 (algorithmique) *En minimisant le nombre d'appels à la fonction de Cauchy f, écrire une fonction* REDHEUNVEC *retournant l'ensemble des couples $(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$ calculés par le schéma* (3) *(Heun ordre 2) pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel).* □

Q. 5 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O. (1)-2 par le schéma (3) (Heun ordre 2) en utilisant au maximum les fonctions déjà écrites.* ☐

On rappelle le schéma d'Adams-Moulton implicite d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel) :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right). \tag{4}$$

Q. 6 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant le schéma de Heun (3) et le schéma d'Adams-Moulton implicite (4).* ☐

Q. 7 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PreCorVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par la méthode de prédiction-correction précédente.* ☐

Q. 8
1. *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O. (1)-(2) par la méthode de prédiction-correction précédente.*
2. *Comment représenter graphiquement les approximations de w et de $w^{(1)}$ (dérivée de w) obtenues par l'algorithme complet précédent sachant que w est la solution de l'E.D.O. (1)-(2). On utilisera la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐

Exercice 3 : 7 points

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 3 :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3).* ☐

Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 4\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} - h\boldsymbol{k}_1 + 2h\boldsymbol{k}_2), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right.$$

Q. 2 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma d'ordre 3 précédent.* ☐

La **méthode de Adams-Bashforth** explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - 16\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + 5\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{4}$$

Q. 3 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (4). ☐

Q. 4 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedAM3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (4). ☐