

EXAMEN DU 10 AVRIL 2013  
durée : 1h30.

**Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...**  
Tous les calculs doivent être justifiés

**EXERCICE 1 : 11 points**

Soient  $\alpha, \beta, \nu$  et  $c$  quatre réels. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u'(x) + u(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a; b[, \quad (1)$$

$$u'(a) = \alpha, \quad (2)$$

$$u(b) = \beta. \quad (3)$$

**Q. 1** 1. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

2. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

3. Quelles sont les conditions initiales?

4. Quelles sont les conditions aux limites? ■

**Q. 2** 1. Expliquez ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a; b]$  avec  $N$  pas de discrétisation en espace.

2. Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) DISREG permettant d'obtenir cette discrétisation. ■

On note  $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$  cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \nu \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + cu_i = f_i. \quad (4)$$

**Q. 3** 1. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes  $u_i, f_i$  et  $\Delta x$ ?

2. Donner l'ensemble  $\mathcal{E}$  des valeurs que peut prendre  $i$  dans le schéma (4).

3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez. ■

On note  $\mathbf{V}$  le vecteur de dimension  $N + 1$ , de composantes  $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$ .

**Q. 4** Montrer que le vecteur  $\mathbf{V}$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (5)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$  (préciser les dimensions). ■

**Q. 5** Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) ASSEMBLEMAT retournant une matrice  $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

où pour tout  $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $\alpha_j, \beta_j$  et  $\mu_j$  sont des réels donnés. ■

**Q. 6** On suppose les données du problème (1) à (3) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  déjà implémentée :  $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ . Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions) ■

**EXERCICE 2 : 12 points**

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in ]t_0; t_0 + T] \times ]a; b[, \quad (1)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (2)$$

$$u(t, a) = u_a(t), \quad \forall t \in [t_0; t_0 + T], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = v_b(t), \quad \forall t \in ]t_0; t_0 + T]. \quad (4)$$

avec  $\nu$  un réel strictement positif,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ .

**Q. 1** 1. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

2. L'E.D.P. (1) est-elle elliptique, parabolique ou hyperbolique? Justifier.

3. Quelles sont les données du problème (1) à (4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

4. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (4)? (préciser le type)

5. Quelles sont les conditions initiales?

6. Quelles sont les conditions aux limites? ■

On note  $t^n$ ,  $n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$  et  $x_i$ ,  $i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$  les discrétisations régulières des intervalles  $[t_0; t_0 + T]$  et  $[a; b]$  avec  $N_t$  pas de discrétisation en temps et  $N_x$  pas de discrétisation en espace.

**Q. 2** Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des  $t^n$  et des  $x_i$ . ■

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1}. \quad (5)$$

$$\frac{u_{N_x-2}^{n+1} - 4u_{N_x-1}^{n+1} + 3u_{N_x}^{n+1}}{2\Delta x} = v_b(t^{n+1}). \quad (6)$$

**Q. 3** 1. A quoi correspondent les valeurs  $u_i^{n+1}$ ,  $f_i^{n+1}$ ,  $\Delta t$  et  $\Delta x$ ?

2. Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1).

3. Expliquer comment le schéma (6) a été obtenu à partir de (4).

4. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6).

5. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace? ■

On note  $\mathbf{U}^n$  les vecteurs de dimension  $N_x + 1$ , de composantes  $\mathbf{U}_i^n = u_{i-1}^n$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$ .

**Q. 4** 1. Comment initialiser le vecteur  $\mathbf{U}^0$ ?

2. En supposant le vecteur  $\mathbf{U}^n$  déjà calculé, montrer que le vecteur  $\mathbf{U}^{n+1}$  est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{b}^n \quad (7)$$

en explicitant la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\mathbf{b}^n$  (préciser les dimensions). ■

**Q. 5** 1. *Ecrire la fonction ASSEMBLEMAT1D retournant la matrice  $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu & -4\mu & 3\mu \end{pmatrix} \quad (8)$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\mu$  sont des réels donnés.

2. *On suppose les données du problème (1) à (4) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  déjà implémentée :  $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ .*

*Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6). ■*