Energétique 1ère année **Méthodes Numériques II**
Sup'Galilée **Année 2013-2014**

EXAMEN DU 21 MAI 2014

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

EXERCICE 1 : 12 points

Soient α, β deux réels et f, ν deux fonctions définies sur $[a;b]$ à valeurs réelles. On suppose que ν est une fonction positive. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) + \nu(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[, & (1)\\ u'(a) + 2u(a) &= \alpha, & (2)\\ u(b) &= \beta. & (3)\end{aligned}$$

Q. 1 *1. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

2. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

3. Quelles sont les conditions initiales?

4. Quelles sont les conditions aux limites? ∎

Q. 2 *1. Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle $[a;b]$ avec N pas de discrétisation en espace.*

2. Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) DisReg *permettant d'obtenir cette discrétisation.* ∎

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \nu_i u_i = f_i. \tag{4}$$

Q. 3 *1. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes u_i, ν_i, f_i et Δx?*

2. Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (4).

3. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez. ∎

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). ∎

Q. 5 *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* AssembleMat *retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_d & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_{d-1} & \mu_d\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

où pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$, α_j, β_j sont des réels donnés et $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$. ∎

Q. 6 *On suppose les données du problème* (1) *à* (3) *fournies et la fonction* RSL *permettant la résolution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *déjà implémentée :* $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$. *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1) *à* (3) *basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions)* ▪

Exercice 2 : 14 points

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x),\ \forall (t,x) \in]t_0; t_0+T]\times]a;b[, && (1)\\
u(t_0,x) &= u_0(x),\ \forall x \in [a;b], && (2)\\
u(t,a) &= u_a(t),\ \forall t \in [t_0; t_0+T], && (3)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,b) + 2u(t,b) &= v_b(t),\ \forall t \in]t_0; t_0+T]. && (4)
\end{aligned}$$

avec κ un réel strictement positif, $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1 1. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

2. *Quelles sont les données du problème* (1) *à* (4)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
3. *Quelles sont les inconnues du problème* (1) *à* (4)*? (préciser le type)*
4. *Quelles sont les conditions initiales?*
5. *Quelles sont les conditions aux limites?*
6. *Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.* ▪

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0; t_0+T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des* t^n *et des* x_i. ▪

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \kappa\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} &= f_i^{n+1}. && (5)\\
u_{N_x-2}^{n+1} - 4u_{N_x-1}^{n+1} + (3+4\Delta x)u_{N_x}^{n+1} &= 2\Delta x v_b(t^{n+1}). && (6)
\end{aligned}$$

Q. 3 1. *Expliquer comment le schéma* (5) *a été obtenu à partir de* (1) *et expliciter les valeurs* u_i^{n+1}, f_i^{n+1}, Δt *et* Δx.

2. *Expliquer comment le schéma* (6) *a été obtenu à partir de* (4).
3. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (1) *à* (4) *en utilisant les schémas* (5) *et* (6).
4. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?* ▪

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension N_x+1, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x+1]\!]$.

Q. 4 1. *Comment initialiser le vecteur* $\boldsymbol{U}^0$*?*

2. *En supposant le vecteur* $\boldsymbol{U}^n$ *déjà calculé, montrer que le vecteur* $\boldsymbol{U}^{n+1}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{b}^n \qquad (7)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{b}^n$ *(préciser les dimensions).* ▪

Q. 5 1. *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

où α, β, μ_1, μ_2 *et* μ_3 *sont des réels donnés.*

2. *On suppose les données du problème* (1) *à* (4) *fournies et la fonction* RSL *permettant la résolution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *déjà implémentée :* $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$.

   Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) *à* (4) *en utilisant les schémas* (5) *et* (6). ▪