

EXAMEN DU 16 MARS 2016
durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Tous les calculs doivent être justifiés

EXERCICE 1 : 12.5 points

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + cu(x) = f(x), \forall x \in]a; b[, \quad (1)$$

$$-u'(a) + u(a) = \alpha, \quad (2)$$

$$u(b) = \beta. \quad (3)$$

où c est un réel strictement positif.

Q. 1 1. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

2. Quelles sont les données du problème (1)-(3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

3. Quelles sont les inconnues du problème (1)-(3)? (préciser le type)

4. Quelles sont les conditions initiales?

5. Quelles sont les conditions aux limites?

Q. 2 1. Expliciter la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

2. Ecrire la fonction **DISREG** permettant de retourner cette discrétisation.

On note $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1)-(3) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f_i, \quad (4)$$

$$(3 + 2h)u_0 - 4u_1 + u_2 = 2h\alpha. \quad (5)$$

Q. 3 1. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c et h ?

2. Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (2).

3. Donner une discrétisation détaillée du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5).

4. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Q. 4 Montrer que le vecteur \mathbf{V} est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (6)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions).

Q. 5 Ecrire la fonction **ASSEMBLE** retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

où $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2$ et ν_3 sont des réels donnés.

Q. 6 Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (6). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{SOLVE}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

EXERCICE 2 : 9.5 points

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \alpha(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in]0; T] \times]a; b[, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (2)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = v_a(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (3)$$

$$u(t, b) = u_b(t), \quad \forall t \in [0; T]. \quad (4)$$

avec $\alpha(x) > 0$, $T > 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

- Q. 1**
1. Quelles sont les données du problème (1) à (4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)
 2. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (4)? (préciser le type)
 3. Quelles sont les conditions initiales?
 4. Quelles sont les conditions aux limites?
 5. Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.

On note t^n , $n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ et x_i , $i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$ les discrétisations régulières des intervalles $[0; T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i .

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (5)$$

$$u_2^n - 4u_1^n + 3u_0^n = 2\Delta x v_a(t^n). \quad (6)$$

- Q. 3**
1. Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs u_i^n , f_i^n , Δt et Δx .
 2. Expliquer comment le schéma (6) a été obtenu à partir de (3).
 3. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6).
 4. Le schéma est-il implicite ou explicite?
 5. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?

On note \mathbf{U}^n les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\mathbf{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$.

- Q. 4**
1. Comment initialiser le vecteur \mathbf{U}^0 ?
 2. On suppose les données du problème (1) à (4) fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6).