Energétique 1ère année **Méthodes Numériques II**
Sup'Galilée **Année 2016-2017**

Examen du 1 septembre 2017

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Exercice 1 : 12 points

Soient α, β, μ trois réels et f une fonction définie sur $[a;b]$ à valeurs réelles. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-u''(x) + \mu u'(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[, \quad (1)$$
$$-u'(a) = \alpha. \quad (2)$$
$$u(b) = \beta, \quad (3)$$

Q. 1 1. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

2. *Quelles sont les données du problème* (1) *à* (3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
3. *Quelle(s) est(sont) la(les) inconnue(s) du problème* (1) *à* (3)*? (préciser le type)*
4. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) initiale(s)?*
5. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) aux limites?* ▪

Q. 2 1. *Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle $[a;b]$ avec N pas de discrétisation en espace.*

2. *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* DisReg *permettant d'obtenir cette discrétisation.* ▪

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à (3) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mu \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = f_i, \quad (4)$$
$$3u_0 - 4u_1 + u_2 = 2\Delta x \alpha. \quad (5)$$

Q. 3 1. *Expliquer comment le schéma* (4) *a été obtenu à partir de* (1) *et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i et Δx?*

2. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma* (4)*.*
3. *Expliquer comment le schéma* (5) *a été obtenu à partir de* (2)*.*
4. *En déduire le schéma numérique global/complet associé au problème* (1) *à* (3) *en précisant le nombre d'équations, le nombre d'inconnues et son ordre.* ▪

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \quad (6)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). ▪

Q. 5 *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* AssembleMat *retournant une matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $d \geqslant 3$, *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$, α_j, β_j, ν_j *sont des réels donnés.* ▪

Q. 6 *On suppose les données du problème* (1) *à* (3) *fournies et la fonction* RSL *permettant la résolution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *déjà implémentée :* $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$. *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1) *à* (3) *basé sur (6). (Utiliser au maximum les fonctions)* ▪

Exercice 2 : 12 points

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta u(t,x) = f(t,x), \ \forall (t,x) \in]0;T]\times]a;b[, \tag{1}$$

$$u(0,x) = g_0(x), \ \forall x \in [a;b], \tag{2}$$

$$u(t,a) = g_a(t), \ \forall t \in [0;T], \tag{3}$$

$$u(t,b) = g_b(t), \ \forall t \in]0;T]. \tag{4}$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1 1. *Quelles sont les données du problème* (1) *à* (4)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

2. *Quelle(s) est(sont) la(les) inconnue(s) du problème* (1) *à* (4)*? (préciser le type)*

3. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) initiale(s)?*

4. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) aux limites?*

5. *Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.* ▪

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[0;T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des* t^n *et des* x_i. ▪

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta u_i^n = f_i^n. \tag{5}$$

Q. 3 1. *Le schéma* (5) *est-il explicite ou implicite en temps? Justifier.*

2. *Expliquer comment le schéma* (5) *a été obtenu à partir de* (1) *et expliciter les valeurs* u_i^n, f_i^n, Δt *et* Δx.

3. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (1) *à* (4) *en utilisant le schéma* (5).

4. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?* ▪

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 4 *1. Comment initialiser le vecteur* $\boldsymbol{U}^0$ *?*

2. En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^{n-1}$ *déjà calculé, montrer que le vecteur* $\boldsymbol{U}^n$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{b}^{n-1} \tag{6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{b}^{n-1}$ *(préciser les dimensions).* ▪

Q. 5 *1. Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $d \geqslant 3$, *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \nu & \mu & \nu & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \nu & \mu & \nu \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où μ, ν, c_1, c_2 *et* c_3 *sont des réels donnés.*

2. On suppose les données du problème (1) *à* (4) *fournies et la fonction* RSL *permettant la résolution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *déjà implémentée :* $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$.

Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) *à* (4) *en utilisant le schéma* (5). ▪