3.6 Méthodes à pas multiples

3.6.1 Exemple : schéma de point milieu

Considérons la méthode à deux pas définie par la récurrence:

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n-1]} + 2h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}). \tag{3.1}$$

3.6.2 Le principe

Definition 3.1: Méthodes à pas multiples

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i \boldsymbol{f}(t^{n+i}, \boldsymbol{y}^{[n+i]}) \tag{3.2}$$

où k est le nombre de pas, $\alpha_k \neq 0$ et $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$.

Remarque 3.2 Si $\beta_k = 0$ le schéma est explicite, sinon il est implicite.

Definition 3.3: ordre

Soit $\boldsymbol{y}$ la solution d'un problème de Cauchy (**??**)-**??** et $\boldsymbol{y}^{[n+k]}$ le terme obtenu par le schéma (3.2) en prenant $\boldsymbol{y}^{[n+i]} = \boldsymbol{y}(t^{n+i})$, $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$. Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \left\| \boldsymbol{y}(t^{n+k}) - \boldsymbol{y}^{[n+k]} \right\|_\infty .$$

Le schéma (3.2) est alors d'**ordre** p si

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Théorème 3.4: ordre schémas à pas multiples (admis)

Un schéma à pas multiples de type (3.2) est d'ordre p si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i i^q &= q \sum_{i=0}^{k} \beta_i i^{q-1}, \quad \forall q \in [\![1, p]\!]. \end{aligned}$$

Propriété 3.5: stabilité schémas à pas multiples (admis)

Soit une méthode à pas multiples donnée par (3.2). On note P le polynôme défini par

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i.$$

La méthode à pas multiples est **stable**, si

1. toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1,

2. une racine de module égal à 1 est une racine simple de P.

Théorème 3.6: convergence (admis)

On suppose que les k valeurs initiales vérifient,

$$\left\| \boldsymbol{y}(t^i) - \boldsymbol{y}^{[i]} \right\| \leqslant C_0 h^p, \ \forall i \in [\![0, k-1]\!].$$

Si le schéma (3.2) est **stable et d'ordre** p, alors il est **convergent** d'ordre p :

$$\left\| \boldsymbol{y}(t^n) - \boldsymbol{y}^{[n]} \right\| \leqslant C h^p, \ \forall n \in [\![0, N]\!].$$

Remarque 3.7 Pour obtenir, à partir d'un schéma à k pas, un schéma d'ordre p il faut obligatoirement initialiser les k premièrs termes $(\boldsymbol{y}^{[n]})_{n=0}^{k-1}$ à l'aide d'un schéma d'ordre p au moins pour conserver l'ordre.

3.6.3 Méthodes explicites d'Adams-Bashforth

On note en abrégé $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. Voici trois schémas :

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 2 à 2 pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(3\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right). \tag{3.3}$$

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 3 à 3 pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right). \tag{3.4}$$

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4 à 4 pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right). \tag{3.5}$$

Exercice 3.6.1

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} \quad = \quad \boldsymbol{y}^{[n]} + \tfrac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right). \tag{3.6}$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.
Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDAB4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par cette méthode.*

3.6.4 Méthodes implicites d'Adams-Moulton

On note en abrégé $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. Voici trois schémas :

- schéma d'Adams-Moulton d'ordre 2 à 1 pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}^{[n+1]} + \boldsymbol{f}^{[n]}\right). \tag{3.7}$$

- schéma d'Adams-Moulton d'ordre 3 à 2 pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right) \tag{3.8}$$

- schéma d'Adams-Moulton d'ordre 4 à 3 pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right) \tag{3.9}$$

Ces schémas sont **implicites** et leur ordre correspond au nombre de pas plus un.

3.6.5 Schéma prédicteur-correcteur

Principe

Une méthode de prédiction-correction procède en deux étapes à chacune des itérations :

- **Prédiction** : on calcule une approximation de $\boldsymbol{y}(t_{n+1})$ notée $\bar{\boldsymbol{y}}^{[n+1]}$ à l'aide du **schéma explicite**
- **Correction** : on utilise le schéma implicite dans lequel les fonctions $\boldsymbol{f}$ utilisant $\boldsymbol{y}^{[n+1]}$ sont remplacées par les fonctions $\boldsymbol{f}$ utilisant $\bar{\boldsymbol{y}}^{[n+1]}$.

Pour $n \leftarrow 0$ **à** N **faire**
  $\bar{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} \leftarrow$ donné par un **schéma explicite**
  $\boldsymbol{y}^{[n+1]} \leftarrow$ donné par **un schéma implicite**, inconnue $\boldsymbol{y}^{[n+1]}$ remplacée par $\bar{\boldsymbol{y}}^{[n+1]}$
Fin Pour

Exemple

Euler explicite : $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$
Trapèze implicite : $\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}))$
On obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \bar{\boldsymbol{y}}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) & \textbf{Prédiction} \\ \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \bar{\boldsymbol{y}}^{[n+1]}) + \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})) & \textbf{Correction} \end{array}\right.$$

Exercice 3.6.2

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right)$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDPreCor4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction* $\boldsymbol{f}$ *dans la boucle principale.*

3.7 Partiel du 10 février 2016, exercice 1

Q. 1 1. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

2. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

3. *Que cherche-t'on?*

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$\begin{aligned} y^{(3)}(t) + (1-t)y^{(1)}(t) + ty(t) &= 0, \ t \in]0, 10], & (3.10)\\ y(0) &= 0, & (3.11)\\ y^{(1)}(0) &= 1, & (3.12)\\ y^{(2)}(0) &= -3. & (3.13) \end{aligned}$$

Ici, $y^{(n)}(t)$ note la dérivée n-ième de la fonction y en t.

Q. 2 1. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O. précédente.*

Q. 3 *Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose $y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ (4 fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}$).*

1. *Rappeler les développements de Taylor de $y(t+h)$ et $y(t-h)$.*

2. *En déduire trois approximations de $y'(t)$, deux à l'ordre 1 et une à l'ordre 2.*

3. *Déduire d'une des trois approximations précédentes, un schéma numérique explicite pour l'approximation d'un problème de Cauchy scalaire.*

Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right). \tag{3.14}$$

Q. 4 1. *Expliquer en détail comment utiliser ce schéma pour résoudre l'E.D.O.* (3.10)-(3.13) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

2. *Donner une relation entre $\boldsymbol{y}^{[n]}$ et la fonction y du problème* (3.10)-(3.13)

Q. 5 (algorithmique) *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant les points t^n, $t^0 = a < t^1 < \ldots < t^N = b$, points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant).*

Q. 6 (algorithmique) *Ecrire une fonction* REDRK2Vec *retournant l'ensemble des couples $(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$ calculés par le schéma* (3.14) *(Runge-Kutta ordre 2) pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel).*

Q. 7 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (3.10)-(3.13) *par le schéma* (3.14) *(Runge-Kutta ordre 2) en utilisant au maximum les fonctions déjà écrites.*

On rappelle le schéma d'Adams-Moulton implicite d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel) :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right). \tag{3.15}$$

Q. 8 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant les schémas* (3.14) *(Runge-Kutta ordre 2) et d'Adams-Moulton implicite d'ordre 2.*

Q. 9 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PreCorVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par la méthode de prédiction-correction précédente.*

Q. 10 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (3.10)-(3.13) *par la méthode de prédiction-correction précédente.*