4.1 Exemples d'E.D.P.

4.1.1 Equation de Laplace/Poisson

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

où Δ est l'opérateur laplacien : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
Conditions aux limites :

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de $\partial\Omega$,

$$u = g, \quad \text{sur } \Gamma_D \subset \partial\Omega. \tag{4.2}$$

- **Neumann** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{sur } \Gamma_N \subset \partial\Omega. \tag{4.3}$$

  où $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad}\, u, \boldsymbol{n} \rangle$ avec $\boldsymbol{n}$ normale exterieure unitaire à Ω

- **Robin** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \quad \text{sur } \Gamma_R \subset \partial\Omega. \tag{4.4}$$

4.1.3 Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) - D\Delta u(t, \boldsymbol{x}) = \frac{f(t, \boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \forall t \in [0, T] \tag{4.5}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- D, coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s),
- f, production volumique de chaleur (en W/m^3),
- ρ, masse volumique du matériau (en kg/m^3),
- c, chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg/K$),
- Δu laplacien (en espace) : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$
- **condition initiale**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \tag{4.6}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \ \forall t \in [0, T] \quad u(t, \boldsymbol{x}) = g_D(t, \boldsymbol{x}) \tag{4.7}$$

  - **Neumann** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \ \forall t \in [0, T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t, \boldsymbol{x}) = g_N(t, \boldsymbol{x}) \tag{4.8}$$

  - **Robin** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega, \ \forall t \in [0, T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t, \boldsymbol{x}) + \alpha u(t, \boldsymbol{x}) = g_N(t, \boldsymbol{x})$$

4.1.4 Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \boldsymbol{x}) - c^2 \Delta u(t, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0, T] \tag{4.9}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- $c > 0$ vitesse de propagation de l'onde,
- **conditions initiales**

$$\begin{aligned} u(0, \boldsymbol{x}) &= u_0(\boldsymbol{x}), & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ [\textbf{position initiale}] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \boldsymbol{x}) &= v_0(\boldsymbol{x}), & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ [\textbf{vitesse initiale}] \end{aligned}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0, T], \qquad u(t, \boldsymbol{x}) = g_D(t, \boldsymbol{x})$$
  - **Neumann** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0, T], \qquad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \boldsymbol{x}) = g_N(t, \boldsymbol{x})$$
  - **Robin** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_R \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0, T], \qquad c^2 \frac{\partial u}{\partial n}(t, \boldsymbol{x}) + \alpha u(t, \boldsymbol{x}) = g_N(t, \boldsymbol{x})$$

4.3 Méthodes de résolution numérique d'EDP

Méthodes déterministes :

- **méthode des différences finies**
- méthode des éléments finis
- méthode des volumes finis

4.4 Opérateurs aux différences finies

4.4.1 Dimension 1

Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière, $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

$$(D_h^+ \varphi)(x) = \frac{1}{h}\left(\varphi(x+h) - \varphi(x)\right) \tag{4.10}$$

$$(D_h^- \varphi)(x) = \frac{1}{h}\left(\varphi(x) - \varphi(x-h)\right) \tag{4.11}$$

$$(D_h^0 \varphi)(x) = \frac{1}{2h}\left(\varphi(x+h) - \varphi(x-h)\right) \tag{4.12}$$

- D_h^+ **opérateur progressif/décentré avancé**
- D_h^- **opérateur rétrograde/décentré retardé**
- D_h^0 **opérateur centré**

Definition 4.1

Soit $h > 0$. On dit qu'un opérateur aux différences finies D_h est une approximation consistante d'ordre p de $\frac{d^k\varphi}{dx^k}$ si pour tout $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière on a

$$\max_{x \in [a,b]} \left| (D_h \varphi)(x) - \frac{d^k \varphi}{dx^k}(x) \right| \leqslant C h^p, \tag{4.13}$$

où C est une constante indépendante de h.

Proposition 4.2

Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est suffisament régulière, les opérateurs D_h^+ et D_h^- appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{d\varphi}{dx}$ et l'opérateur D_h^0 appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}$.

Exercice 4.4.1

Soient $h >$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant

$$\begin{aligned}(D_h^+\varphi)(x) &= \frac{1}{h}(\varphi(x+h)-\varphi(x))\\ (D_h^-\varphi)(x) &= \frac{1}{h}(\varphi(x)-\varphi(x-h))\\ (D_h^0\varphi)(x) &= \frac{1}{2h}(\varphi(x+h)-\varphi(x-h))\end{aligned}$$

Q. 1 *Montrer que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e.* $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\forall\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $D_h(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda D_h\varphi+\mu D_h\psi$*.)*

Q. 2 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 2$*. Montrer que les opérateurs* D_h^+ *et* D_h^- *sont des approximations consistantes d'ordre 1 de* $\frac{d\varphi}{dx}$*.*

Q. 3 *On suppose que* $\varphi\in\mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $k\geqslant 3$*. Montrer que l'opérateur* D_h^0 *est une approximation consistante d'ordre 2 de* $\frac{d\varphi}{dx}$*.*

Proposition 4.3

Soient $\varphi\in\mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$. On note D_h^2 l'opérateur défini, pour tout $x\in]a,b[$ et $h>0$ tels que $x\pm h\in[a,b]$, par

$$(D_h^2\varphi)(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{h^2}\left[\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)\right]. \tag{4.14}$$

Alors $D_h^2\varphi$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$.
De plus on a

$$D_h^2\varphi = D^0_{\frac{h}{2}}(D^0_{\frac{h}{2}}\varphi)=D_h^+(D_h^-\varphi)=D_h^-(D_h^+\varphi) \tag{4.15}$$

est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$.

4.4.2 Dimension $n>1$

Proposition 4.4: (admis)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ avec $f\in\mathcal{C}^r(U)$. Soient $\boldsymbol{x}\in U$, $i\in[\![1,n]\!]$, et $h\in\mathbb{R}^*$ vérifiant $\forall t\in[0,1]$, $\boldsymbol{x}+th\boldsymbol{e}^{[i]}\in U$ où $\boldsymbol{e}^{[i]}$ est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Alors il existe $\theta\in]0,1[$ tel quel

$$f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}^{[i]})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{k=1}^{r-1}\frac{h^k}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(\boldsymbol{x})+\frac{h^r}{r!}\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}(\boldsymbol{x}+\theta h\boldsymbol{e}^{[i]}) \tag{4.16}$$

où $\boldsymbol{e}^{[i]}$ est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière, $h > 0$ et $i \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}
(D^+_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x})\Big) \\
(D^-_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\Big) \\
(D^0_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 4.4.2

Soient $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisament régulière, $h > 0$ et les trois opérateurs aux différences finies suivant définis pour $i \in [\![1, 2]\!]$

$$\begin{aligned}
(D^+_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x})\Big) \\
(D^-_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\Big) \\
(D^0_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2h}\Big(\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\Big)
\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{e}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q. 1 *Monter que ces trois opérateurs sont linéaires (i.e.* $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_{h,i}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda D_{h,i}\varphi + \mu D_{h,i}\psi$.*)*

Q. 2 *On suppose que* $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ *avec* $k \geqslant 2$. *Montrer que les opérateurs* $D^+_{h,i}$ *et* $D^-_{h,i}$ *appliqués à* φ *sont des approximations consistantes d'ordre* 1 *de* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Q. 3 *On suppose que* $\varphi \in \mathcal{C}^k(U \subset \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ *avec* $k \geqslant 3$. *Montrer que l'opérateur* $D^0_{h,i}$ *appliqué à* φ *est une approximation consistante d'ordre* 2 *de* $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Proposition 4.5

Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est suffisament régulière, les opérateurs $D^+_{h,i}$ et $D^-_{h,i}$ appliqués à φ sont des approximations consistantes d'ordre 1 de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ et l'opérateur $D^0_{h,i}$ appliqué à φ est une approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Proposition 4.6

Soients $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi \in \mathcal{C}^4(U \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On note $D^2_{h,i}$ l'opérateur défini, pour tout $\boldsymbol{x} \in U$ et $h > 0$ vérifiant $\boldsymbol{x} \pm h\boldsymbol{e}^{[i]} \in U$, par

$$(D^2_{h,i}\varphi)(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h^2}\Big[\varphi(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}^{[i]}) - 2\varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{e}^{[i]})\Big] \tag{4.17}$$

Alors $D^2_{h,i}\varphi$ est approximation consistante d'ordre 2 de $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}$.

De plus, on a

$$D^2_{h,i}\varphi = D^0_{\frac{h}{2},i}(D^0_{\frac{h}{2},i}\varphi) = D^+_{h,i}(D^-_{h,i}\varphi) = D^-_{h,i}(D^+_{h,i}\varphi). \tag{4.18}$$