4.5 Méthode des différences finies (dimension 1 en espace)

4.5.1 EDP stationnaire avec conditions aux limites de Dirichlet

EDP modèle stationnaire en dimension 1

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, && (4.24)\\ u(a) &= \alpha, && (4.25)\\ u(b) &= \beta. && (4.26) \end{aligned}$$

ou

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, && (4.27)\\ u(a) &= \alpha, && (4.28)\\ u(b) &= \beta. && (4.29) \end{aligned}$$

où $a < b$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés. Ces deux problèmes sont équivalents et on peut démontrer que ce problème est **bien posé**.

$$x_i = a + ih, \quad \forall i \in [\![0, N]\!], \text{ avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (4.30)\\ u(x_0) &= \alpha, && (4.31)\\ u(x_N) &= \beta. && (4.32) \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (4.33)\\ u(x_0) &= \alpha, && (4.34)\\ u(x_N) &= \beta. && (4.35) \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (4.36)\\ u_0 &= \alpha, && (4.37)\\ u_N &= \beta. && (4.38) \end{aligned}$$

système linéaire de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues !

$$\left\{\begin{array}{lcll}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
 & \vdots & & \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{array}\right.$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ \hline u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha \\ \hline h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \hline \beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{4.39}$$

Proposition 4.1: admis

Le schéma aux différences finies (4.36)-(4.38) est consistant à l'ordre 2 avec l'EDP (4.24)-(4.26) et on a

$$\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \tag{4.40}$$

Exercice 4.5.1: (schéma étudié en cours)

Q. 1 *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix}
\gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma
\end{pmatrix} \tag{4.41}$$

où α, β et γ sont des réels donnés.

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$\begin{array}{rcl}
-u'' + cu & = & f \text{ in }]a, b[, \\
u(a) & = & \alpha, \\
u(b) & = & \beta.
\end{array}$$

Q. 2 *En prenant le jeu de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $f : x \mapsto \cos(x^2)$, écrire un programme permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$* Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*

Q. 3 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule* (4.40).

4.5.2 EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, && (4.42)\\ u(a) &= \alpha, && (4.43)\\ u'(b) &= \beta. && (4.44) \end{aligned}$$

Seule la dernière du système linéaire (4.39) **est à modifier! Remplacer par ???**

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta. \tag{4.45}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0\\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1\\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2\\ & \vdots & & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2}\\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1}\\ u_N - u_{N-1} & = & h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\ \hline -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1\\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} u_0\\ \hline u_1\\ u_2\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{N-2}\\ u_{N-1}\\ \hline u_N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \alpha\\ \hline h^2 f(x_1)\\ h^2 f(x_2)\\ \vdots\\ \vdots\\ h^2 f(x_{N-2})\\ h^2 f(x_{N-1})\\ \hline h\beta \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{4.46}$$

Mais ce schéma est d'ordre 1 **!!!**

Exercice 4.5.2

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4.47}$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4.48}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} & = & 2h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\ \hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -4 & 3
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ \hline u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha \\ \hline h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \hline 2h\beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{4.54}$$

Exercice 4.5.3

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned}
-u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, && (4.55)\\
u'(a) &= \alpha, && (4.56)\\
u(b) &= \beta. && (4.57)
\end{aligned}$$

où c est une fonction positive.

Q. 1 1. *Quelles sont les données du problème (4.55)-(4.57)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

2. *Quelles sont les inconnues du problème (4.55)-(4.57)? (préciser le type)*
3. *Quelles sont les conditions initiales?*
4. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q. 2 *Construire une discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.*

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (4.55) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{4.58}$$

Q. 3 1. *Expliquer comment le schéma (4.58) a été obtenu à partir de (4.55) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*

2. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (4.55).*
3. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*
4. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{4.59}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (4.55) à (4.57) basé sur (4.59). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$ SOLVE$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*