

TRAVAUX DIRIGÉS - ALGORITHMIQUE¹

1 Numériques

EXERCICE 1

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction algorithmique `sum01` permettant de calculer

$$\sum_{k=1}^m k \cos\left(\frac{2\pi k}{m}t\right).$$

EXERCICE 2

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{R}$. On souhaite calculer

$$\prod_{n=1}^k (2n-1) \cos(2kz/n)^k$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique `prod01` permettant de faire ce calcul en utilisant la fonction puissance `power(x,y)` ou `x^y` correspondant à x^y .

Q. 2 Ecrire la fonction algorithmique `prod02` permettant de faire ce calcul sans utiliser la fonction puissance `power` ou l'opérateur `^`. On rappelle que si $k \in \mathbb{N}$ alors $x^k = \prod_{i=1}^k x$.

EXERCICE 3

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right\}.$$

Ecrire la fonction `SFT` permettant de calculer $x_n(t)$ correspondant à la série $x(t)$ tronquée au n -ième terme.

EXERCICE 4

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ et $(y_k)_{k=1}^m$ des réels. Le réel z est donné par

$$z = \prod_{k=1}^m \sum_{i=0}^n x_i \cos\left(\frac{i\pi}{n}y_k\right).$$

Q. 1 a. Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer z ? Préciser leurs types et leurs dimensions.

b. Ecrire la fonction `PS1` permettant de calculer z . Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.

c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

Soient $(z_j)_{j=0}^p$ les réels définis par

$$z_j = \prod_{k=1}^m \frac{2\pi j}{p} \sum_{i=0}^n x_i \cos\left(\frac{i\pi}{n}y_k\right), \quad \forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket.$$

Q. 2 a. Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer $(z_j)_{j=0}^p$? Préciser leurs types et leurs dimensions.

b. Ecrire la fonction `PS2` permettant de calculer l'ensemble des $(z_j)_{j=0}^p$. Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.

¹Les énoncés sont parfois intentionnellement flous!

c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

EXERCICE 5

Dans cet exercice les notations suivantes seront utilisées. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $A_{:,j}$ correspond au j -ème vecteur colonne de A et s'écrit algorithmiquement $A(:, j)$. Si on écrit $v \leftarrow A(:, j)$ alors l'accès aux éléments de v s'effectue avec la commande $v(i)$. De plus, au niveau algorithmique, si w est un vecteur colonne ou ligne de dimension m , alors $A(:, j) \leftarrow w$ est autorisé et correspond mathématiquement à $A_{:,j} = w$ ou $A_{:,j} = w^t$ c'est à dire $A_{i,j} = w_i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.
- $A_{i,:}$ correspond au i -ème vecteur ligne de A et s'écrit algorithmiquement $A(i, :)$ et si on écrit $u \leftarrow A(i, :)$ alors l'accès aux éléments de u s'effectue avec la commande $u(j)$. De plus, au niveau algorithmique, si w est un vecteur ligne ou colonne de dimension n , alors $A(i, :) \leftarrow w$ est autorisé et correspond mathématiquement à $A_{i,:} = w$ ou $A_{i,:} = w^t$ c'est à dire $A_{i,j} = w_j, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q. 1 Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Ecrire la fonction `ProSca` permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Q. 2 Soient $u \in \mathbb{R}^p$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

- Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $v = Au$.
- Ecrire la fonction `ProMatVec1` permettant de retourner Au .
- Ecrire v_i comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées en début d'exercice.
- Ecrire la fonction `ProMatVec2` permettant de retourner Au en utilisant la fonction `ProSca`.

Q. 3 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

- Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $G = AB$.
- Ecrire la fonction `ProMatMat1` permettant de retourner G .
- Ecrire $G_{:,j}$ (j -ème vecteur colonne de G) comme un produit matrice vecteur
- Ecrire la fonction `ProMatMat2` permettant de retourner G en utilisant la fonction `ProMatVec2`.

EXERCICE 6

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $u = (u_1, \dots, u_m)$ un vecteur de \mathbb{R}^m , $v = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur de \mathbb{R}^p et $w = (w_1, \dots, w_q)$ un vecteur de \mathbb{R}^q .

Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^m \left((x + \sin(u_i)) \sum_{k=1}^n (k + (x - i)^2) \right)$$

- Q. 1** (a) Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y ? Préciser les types et les dimensions.
(b) Ecrire la fonction `PS` permettant de calculer y . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
(c) Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

Soit $z = (z_1, \dots, z_m)$ le vecteur de \mathbb{R}^m défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^p \left((u_i - k \sin(x)) \prod_{j=1}^p (v_k + (x - j)^2) \right), \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

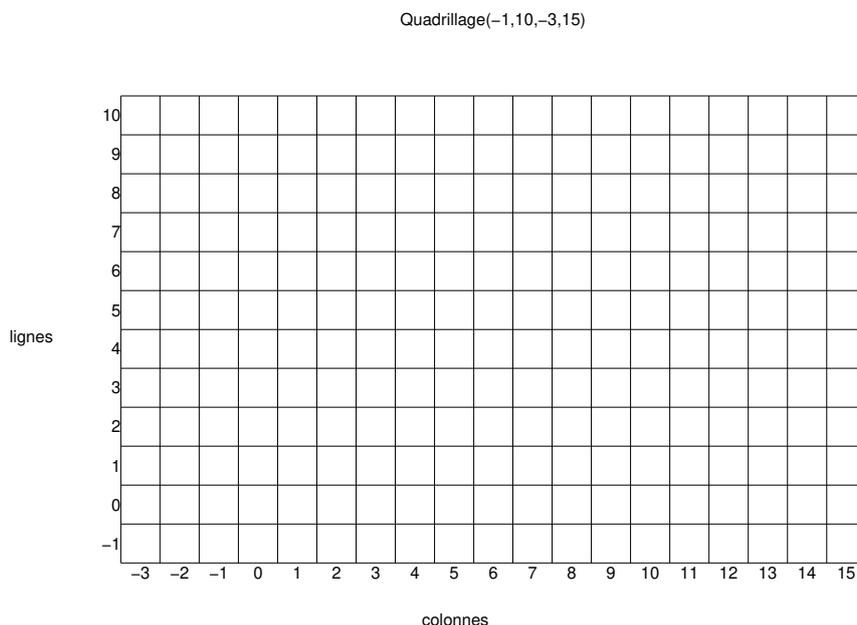
- Q. 2** (a) Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer z ? Préciser les types et les dimensions.
(b) Ecrire la fonction `SP` permettant de calculer z . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
(c) Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

2 Graphiques

Pour certains exercices de cette partie, on dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction

`quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)`

dont voici un exemple d'utilisation



On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

EXERCICE 7

Soient a et b deux réels, $a < b$. On note $(x_i)_{i=0}^n$ les $n+1$ points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ donnés par $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/n$.

Q. 1 Ecrire une fonction `DisReg` permettant de d'obtenir les $n+1$ points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$.

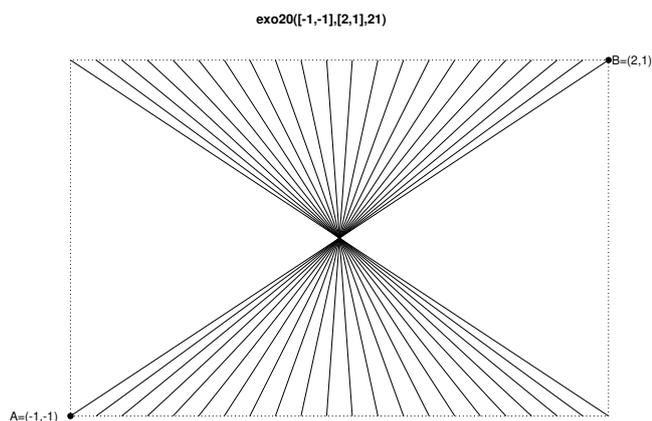
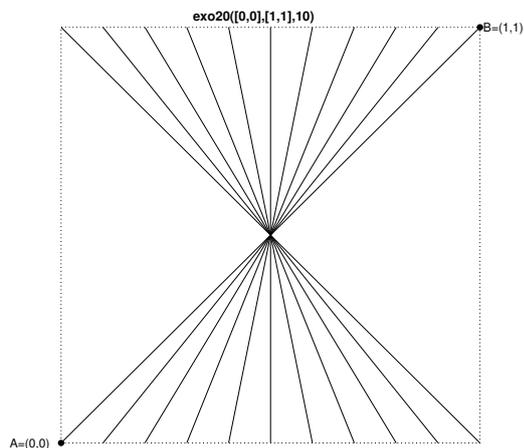
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A , (x_B, y_A) , B et (x_A, y_B) .

On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B , on dispose de la commande `plot([x_A, x_B], [y_A, y_B])`.

Q. 2 Ecrire une fonction `exo20` de paramètres A , B et n permettant de

- représenter les bords du rectangle,
- relier les points des bords haut et bas, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en $n+1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.

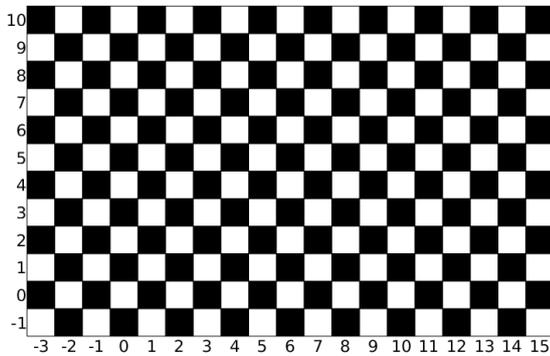
Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :



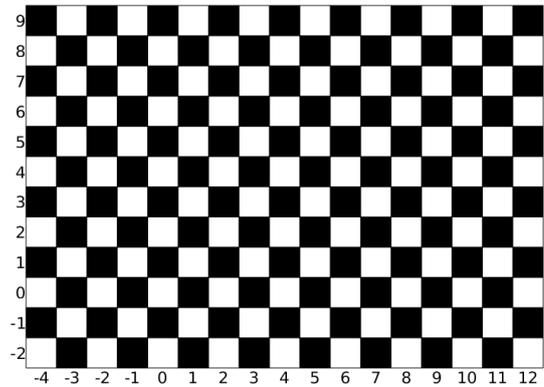
EXERCICE 8

Ecrire la fonction `DamierHG(imin,imax,jmin,jmax)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage obtenu par la commande `Quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` sachant que le pavé en haut à gauche d'un quadrillage doit toujours être noir. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

DamierHG(-1,10,-3,15)



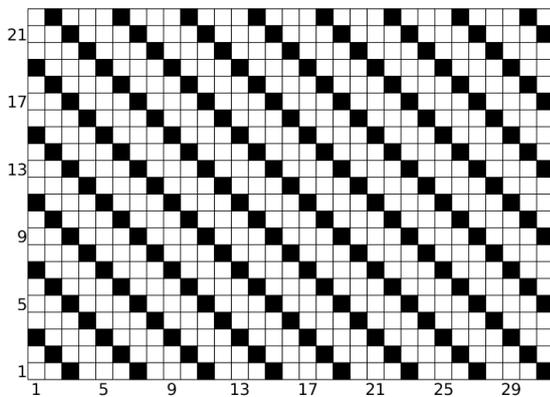
DamierHG(-2,9,-4,12)



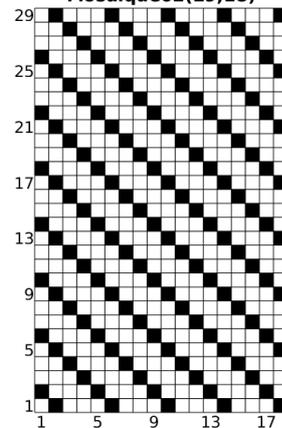
EXERCICE 9

Q. 1 Ecrire la fonction `Mosaïque62(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `Quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case en ligne 1 et colonne m est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

Mosaïque62(22,31)



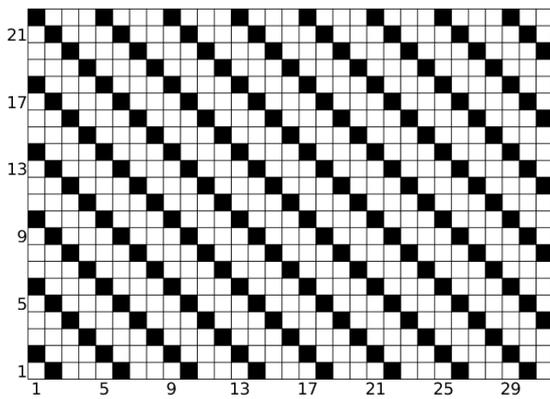
Mosaïque62(29,18)



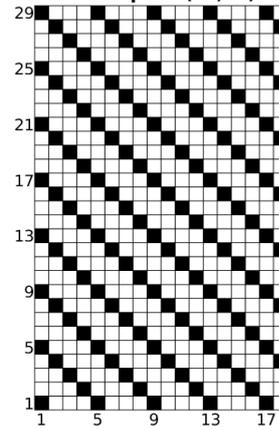
EXERCICE 10

Q. 1 Ecrire la fonction `Mosaïque63(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `Quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case en ligne n et colonne 1 est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

Mosaïque63(22,31)



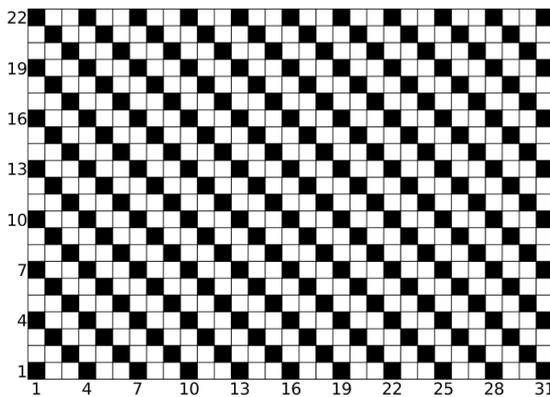
Mosaïque63(29,18)



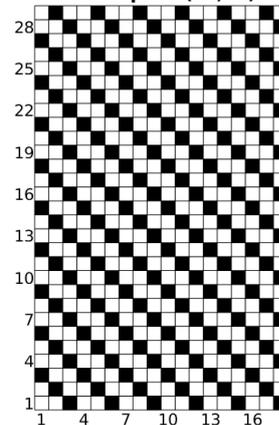
EXERCICE 11

Q. 1 Ecrire la fonction *Mosaïque72*(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage *Quadrillage*($1,n,1,m$) sachant que la case en ligne 1 et colonne m est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

Mosaïque72(22,31)



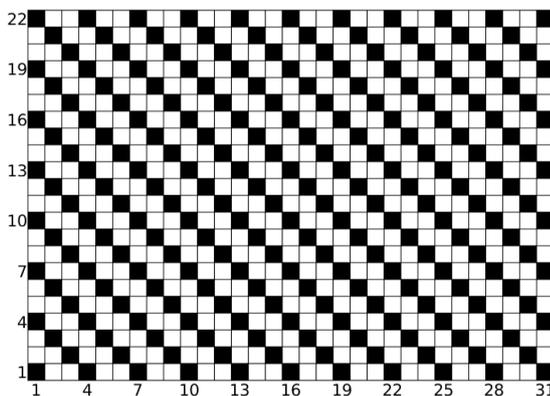
Mosaïque72(29,18)



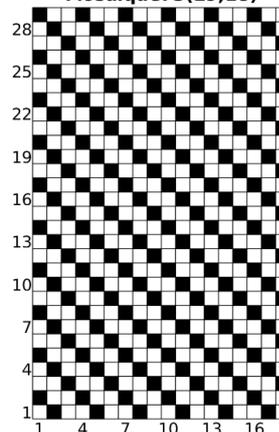
EXERCICE 12

Q. 1 Ecrire la fonction *Mosaïque73*(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage *Quadrillage*($1,n,1,m$) sachant que la case en ligne n et colonne 1 est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

Mosaïque73(22,31)



Mosaïque73(29,18)



EXERCICE 13

Q. 1 Ecrire la fonction $Mosaique80(n)$ permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage $Quadrillage(-n,n,-n,n)$ Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

