TRAVAUX DIRIGÉS - ALGORITHMIQUE[1]

1 Numériques

EXERCICE 1

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction algorithmique `sum01` permettant de calculer

$$\sum_{k=1}^{m} k \cos\left(\frac{2\pi k}{m} t\right).$$

[1] Les énoncés sont parfois intentionnellement flous!

Exercice 2

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{R}$. On souhaite calculer

$$\prod_{n=1}^{k}(2n-1)\cos(2kz/n)^k$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* `prod01` *permettant de faire ce calcul en utilisant la fonction puissance* `power(x,y)` *ou* `x^y` *correspondant à* x^y.

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* `prod02` *permettant de faire ce calcul sans utiliser la fonction puissance* `power` *ou l'opérateur* `^`. *On rappelle que si* $k \in \mathbb{N}$ *alors* $x^k = \prod_{i=1}^{k} x$.

x^y ?

$x^y = \cancel{\exp}\ e^{\log(x^y)} = e^{y\log(x)}$

Q1 Données $k \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{R}$

Résultat $x \in \mathbb{R}$

```
Fonction x ← prod01(k, z)
    x ← 1
    pour n ← 1:k
        x ← x*(2*n-1)*(cos(2*k*z/n))^k
    Fin
Fn
```

powerint(cos(2*k*z/n), k)

$x^k = \underbrace{x*x*\cdots*x}_{k\text{ fois}} = \prod_{i=1}^{k} x$

```
Fonction z ← powerint(x,k)        x^k
    z ← 1
    pour i ← 1:k
        z ← z*x
    Fn
Fn
```

Q2

R1
```
x ← 1
pour n ← 1:k
    P ← ∏_{i=1}^{k} (cos(2*k*z/n))
    x ← x*(2*n-1)*P
fn
```

$\boxed{R_2}$
```
x ← 1
pour n ← 1:k
    P ← 1
    Pour i ← 1:k
        P ← P* cos(2*k*z/n)
    Fn
    x ← x*(2*n-1)*P
fn
```

x ← 1

x = 1

1 = x

EXERCICE 3 $2n-1$

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right\} = \frac{4A}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\cos((2n-1)\omega t)$$

1 3 5 7

Ecrire la fonction SFT permettant de calculer $x_n(t)$ correspondant à la série $x(t)$ tronquée au n-ième terme.

Données $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$

Resutat $x \in \mathbb{R}$

$S * \frac{1}{C}\cos(C\omega t)$

fonction $x \leftarrow SFT(n, t, w, A)$

```
c ← 1
sign ← +1
x ← 0
pour i ← 1 : n
    x ← x + sign * 1/c * cos(c * w * t)
    sign ← sign * (-1)
    c ← c + 2
fin
```

Exercice 4

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ et $(y_k)_{k=1}^m$ des réels. Le réel z est donné par

$$z = \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} x_i \cos(\frac{i\pi}{n} y_k).$$

Q. 1 ***a.*** *Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer y? Préciser leurs types et leurs dimensions.*

b. *Ecrire la fonction **PS1** permettant de calculer z. Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.*

c. *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

Soient $(z_j)_{j=0}^p$ les réels définis par

$$z_j = \prod_{k=1}^{m} \frac{2\pi j}{p} \sum_{i=0}^{n} x_i \cos(\frac{i\pi}{n} y_k), \ \forall j \in [\![0, p]\!].$$

Q. 2 ***a.*** *Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer $(z_j)_{j=0}^p$? Préciser leurs types et leurs dimensions.*

b. *Ecrire la fonction **PS2** permettant de calculer l'ensemble des $(z_j)_{j=0}^p$. Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.*

c. *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

X: $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & i & i+1 & n+1 \\ \hline x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_n \end{array}$

Q_1 Données: $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$

$Y \in \mathbb{R}^m$ $Y(k) = y_k$ $\forall k \in [\![1, m]\!]$

$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Resultat $z \in \mathbb{R}$

Fonction $z \leftarrow PS1(X, Y)$

$$z = \prod_{k=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i \cos(\frac{i\pi}{n} y_k)}_{S}.$$

(Facultatif ds l'algo)
$m \leftarrow length(Y)$
$n \leftarrow length(X) - 1$

$z \leftarrow 1$
pour $k \leftarrow 1 : m$
  $S \leftarrow 0$
  pour $i \leftarrow 0 : n$
    $S \leftarrow S + X(i+1) * \cos(i * \pi * Y(k)/n)$
  fin
  $z \leftarrow z * S$
fin

$x \leftarrow PS1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$

$x2 \leftarrow PS1([1,2,3,4], [8,7])$

Données $\cancel{(x_i)_{i=0}^n}$

$Q_2 \to$ à la maison

EXERCICE 5 "A corriger"

Dans cet exercice les notations suivantes seront utilisées. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(:,j)`. Si on écrit `v←A(:,j)` alors l'accès aux éléments de `v` s'effectue avec la commande `v(i)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur colonne ou ligne de dimension m, alors `A(:,j)←w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_i$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$.

- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(i,:)` et si on écrit `u←A(i,:)` alors l'accès aux éléments de `u` s'effectue avec la commande `u(j)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur ligne ou colonne de dimension n, alors `A(i,:)←w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_j$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$.

Q. 1 *Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ecrire la fonction* `ProSca` *permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs.*

Q. 2 *Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.*

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.*

b. *Ecrire la fonction* `ProMatVec1` *permettant de retourner $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$.*

c. *Ecrire $\boldsymbol{v}_i$ comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées en début d'exercice.*

d. *Ecrire la fonction* `ProMatVec2` *permettant de retourner $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ en utilisant la fonction* `ProSca`*.*

Q. 3 *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.*

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.*

b. *Ecrire la fonction* `ProMatMat1` *permettant de retourner $\mathbb{G}$.*

c. *Ecrire $\mathbb{G}_{:,j}$ (j-ème vecteur colonne de $\mathbb{G}$) comme un produit matrice vecteur*

d. *Ecrire la fonction* `ProMatMat2` *permettant de retourner $\mathbb{G}$ en utilisant la fonction* `ProMatVec2`*.*

Exercice 6 "à corriger"

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.
Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^{m} \left((x + \sin(u_i)) \sum_{k=1}^{n} (k + (x-i)^2) \right)$$

Q. 1 **(a)** *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y? Préciser les types et les dimensions.*

(b) *Ecrire la fonction* `PS` *permettant de calculer y. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

(c) *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^{p} \left((u_i - k\sin(x)) \prod_{j=1}^{p} (v_k + (x-j)^2) \right), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

Q. 2 **(a)** *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $\boldsymbol{z}$? Préciser les types et les dimensions.*

(b) *Ecrire la fonction* `SP` *permettant de calculer $\boldsymbol{z}$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

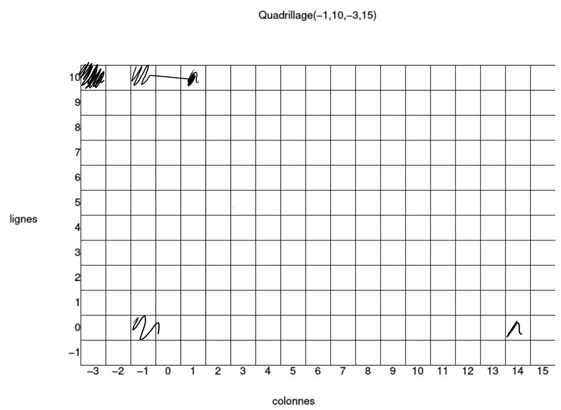
(c) *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

2 Graphiques

Pour certains exercices de cette partie, on dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction

`quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)`

dont voici un exemple d'utilisation



black(5,3)

On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

Exercice 7

Soient a et b deux réels, $a < b$. On note $(x_i)_{i=0}^{n}$ les $n+1$ points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ donnés par $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$.

Q. 1 *Ecrire une fonction* `DisReg` *permettant de d'obtenir les $n+1$ points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$.*

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A, (x_B, y_A), B et (x_A, y_B).
On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B, on dispose de la commande `plot([`x_A, x_B`],[`y_A, y_B`])`.

Q. 2 *Ecrire une fonction* `exo20` *de paramètres A, B et n permettant de*

- *représenter les bords du rectangle,*
- *relier les points des bords haut et bas, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en $n+1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.*

$A \leftrightarrow B$

$A \in \mathbb{R}^2$, $B \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$

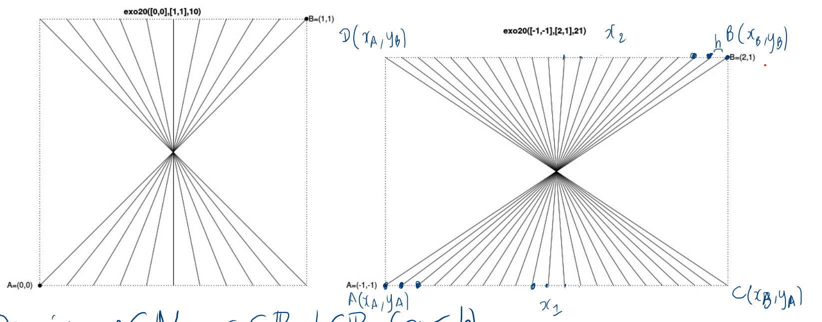
Fonction exo20(A,B,n)
$xA = A(1)$, $xB = B(1)$
$yA = A(2)$, $yB = B(2)$
plot([x_A,x_B],[y_A,y_A])
plot([x_B,x_B],[y_A,y_B])
...
$x_1 = x_A$, $x_2 = x_B$, $h = (x_B - x_A)/n$
pour $k \in 1 : n+1$
plot([x_1,x_2],[y_A,y_B]
$x1 \leftarrow x1 + h$
$x2 \leftarrow x2 - h$
Fin

Sol 1

$X \leftarrow$ DisReg(x_A,x_B,n)
$f = n+1$;
pour $k \in 1 : n+1$
plot([X(k), X(f)], [y_A,y_B])
$f \leftarrow f-1$
end

Sol 2

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :

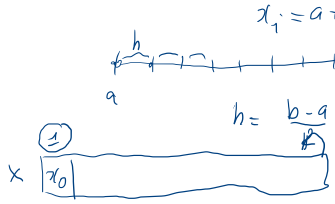


Q1. Données $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$

Resultat $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$

Fonction $X \leftarrow$ DisReg(a,b,n)
Pour $i \leftarrow 0 : n$
$X(i+1) \leftarrow a + i * h$;
Fin
Fin

$x_i = a + ih$ $i \in [\![0, n]\!]$

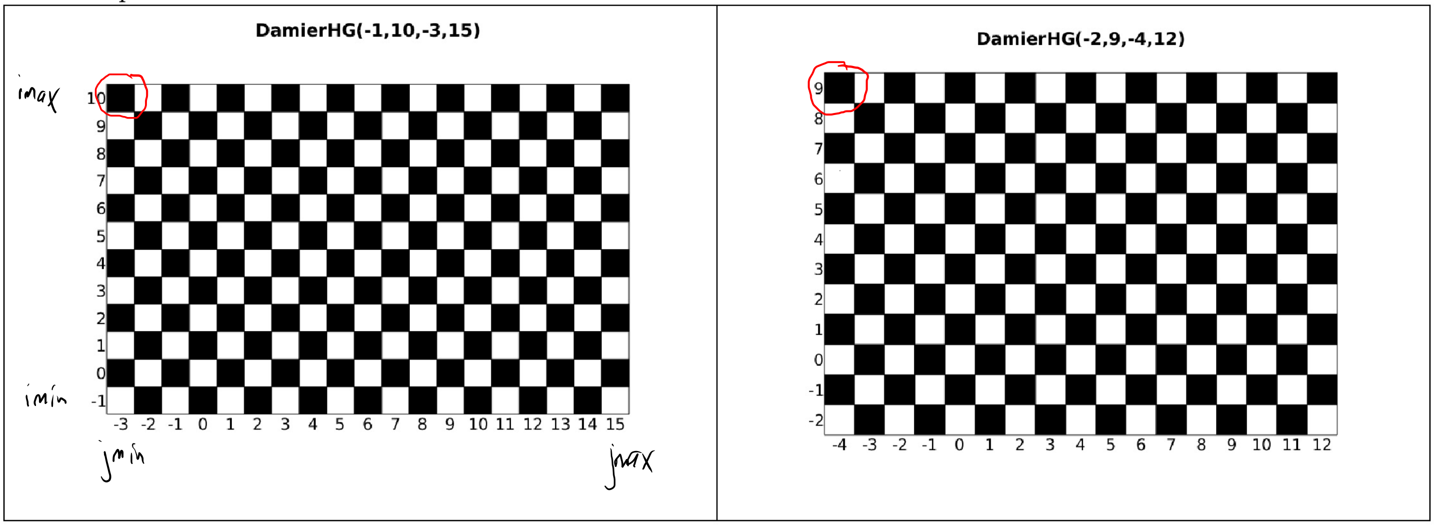


Matlab

$X = a : (b-a)/n : b$;
ou fct X=linspace(a,b,n+1);

Exercice 8

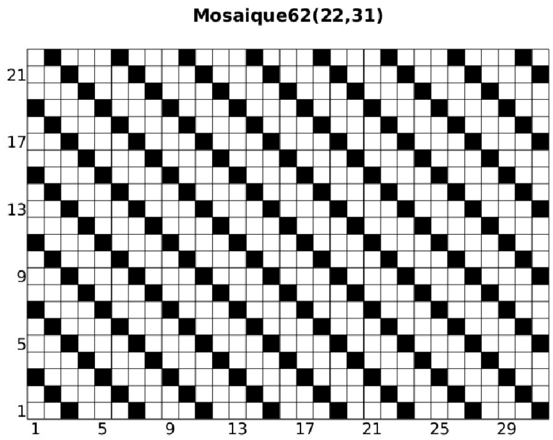
Ecrire la fonction DamierHG(imin,imax,jmin,jmax) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage obtenu par la commande Quadrillage(imin,imax,jmin,jmax) sachant que le pavé en haut à gauche d'un quadrillage doit toujours être noir. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

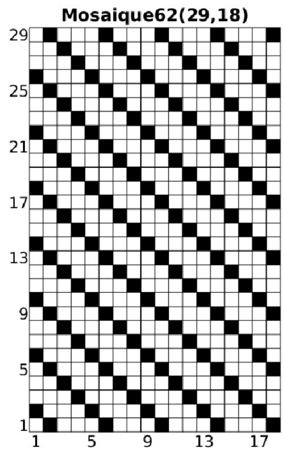



```
Fonction DamierHG(imin, imax, jmin, jmax)
  Quadrillage(imin, imax, jmin, jmax)
  pour j ← jmin : 2 : jmax
    black(imax, j)                 ligne imax
  fin
  motif1(imax, jmin, jmax)

pour i ← imax : -2 : imin
   motif1(i, jmin, jmax)
fin

pour i ← imax-1 : -2 : imin
   motif1(i, jmin+1, jmax)
fin

fonction motif1(i, jmin, jmax)
  pour j ← jmin : 2 : jmax
    black(i, j)
  end
end
```

Exercice 9 Groupe 1

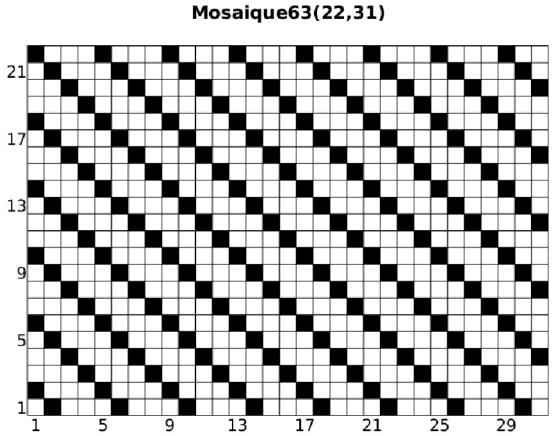
Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique62(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(1,n,1,m) sachant que la case en ligne 1 et colonne m est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

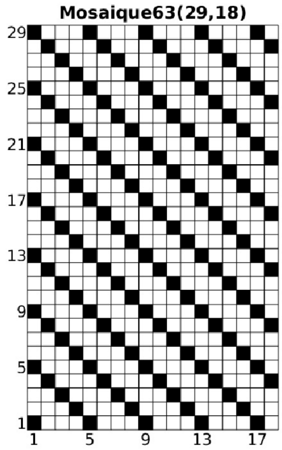




Exercice 10 Groupe 2

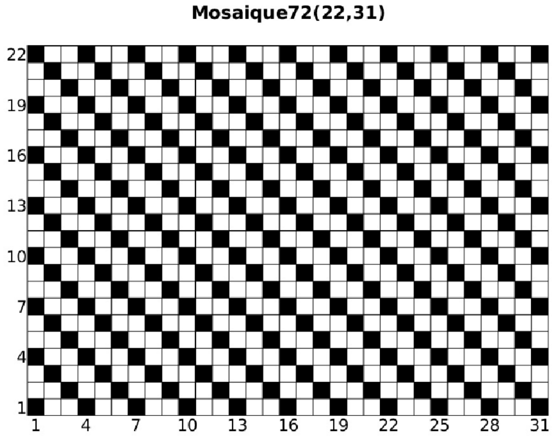
Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique63(n,m) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* Quadrillage(1,n,1,m) *sachant que la case en ligne* n *et colonne* 1 *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

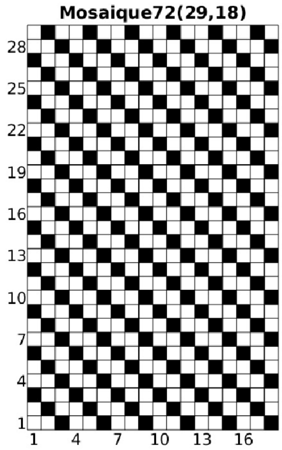




Exercice 11 Groupe 3

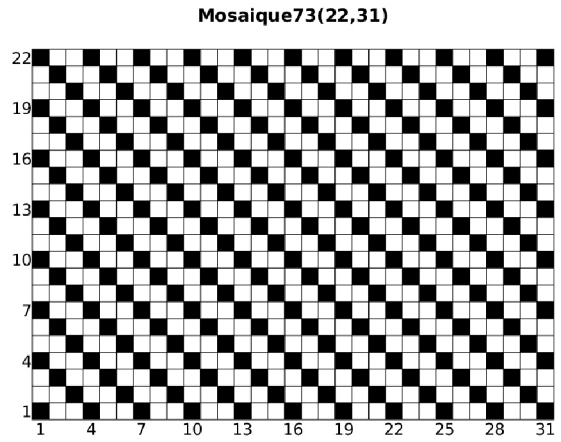
Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique72(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(1,n,1,m) sachant que la case en ligne 1 et colonne m est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

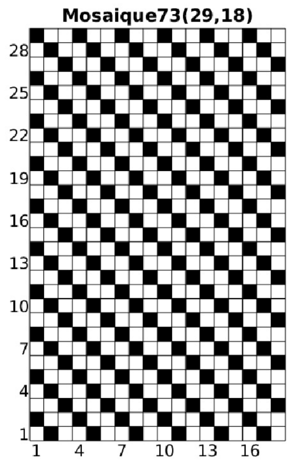




Exercice 12 Groupe 4

Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique73(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(1,n,1,m) sachant que la case en ligne n et colonne 1 est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*





.

Exercice 13

Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique80(n) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* Quadrillage($-n$,n,$-n$,n) *Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*