Energétique 1ère année **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2014-2015**

Examen du 3 février 2015

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés
Le barème est donné à titre indicatif.

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$\theta^{(3)}(t) + t^2\theta^{(2)}(t) + 5t\cos(\theta^{(1)}(t)) - 2\theta(t) = 0,\ t \in]t_0, t_0 + T], \tag{1}$$

$$\theta(t_0) = a, \tag{2}$$

$$\theta^{(1)}(t_0) = b, \tag{3}$$

$$\theta^{(2)}(t_0) = c. \tag{4}$$

avec $t_0 = 0$ et $T = 4\pi$. Ici, $\theta^{(n)}(t)$ note la dérivée n-ième de la fonction θ en t.

Exercice 1 : 4.75 points

Q. 1 (1.25pt) *1. Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. Enoncer de manière précise et dans le cas général la définition d'un problème de Cauchy ***vectoriel****.*

3. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy ***vectoriel****? Préciser leurs types.*

4. Que cherche-t'on? ∎

Q. 2 (1pts) *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O.* (1) *à* (4). ∎

Q. 3 (2.5pts) *Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (2 fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}$).*

1. Rappeler les développements de Taylor de $y(t+h)$ et $y(t-h)$ et en déduire deux approximations de $y'(t)$ d'ordre 1.

2. En supposant $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, déterminer une approximation de $y'(t)$ d'ordre 2.

3. Déduire d'une des trois approximations précédentes, un schéma numérique ***explicite*** *pour l'approximation d'un problème de Cauchy* ***scalaire****.* ∎

Exercice 2 : 9.5 points

On donne le schéma suivant d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}^{[n+1]} &= \boldsymbol{Y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{Y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{Y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{Y}^{[n]})\right) \\ \boldsymbol{Y}^{[0]} & \text{donné.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Q. 1 (2pts) *1. Le schéma* (2.1) *est-il explicite, implicite, à un pas, à pas multiples? Justifiez.*

2. Expliquer en détail comment utiliser le schéma (2.1) *pour résoudre l'E.D.O.* (1) *à* (4) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

3. Donner une relation entre $\boldsymbol{Y}^{[n]}$ et la fonction θ du problème (1) *à* (4) ∎

Q. 2 (0.5pt - algorithmique) *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant les points t^n, $t^0 = a < t^1 < \ldots < t^N = b$, points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant).* ■

Q. 3 (2pt - algorithmique) *Ecrire une fonction* resEDO2 *retournant l'ensemble des couples $(t^n, \boldsymbol{Y}^{[n]})$ calculés par le schéma* (2.1) *pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel).* ■

Q. 4 (0.5pt - algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (1) *à* (4) *par le schéma* (2.1) *en utilisant au maximum les fonctions déjà écrites.* ■

On rappelle les schéma d'Euler progressif et régressif pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{Y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{Y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{Y}^{[n+1]}), \\ \boldsymbol{Y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{2.2}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{Y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{Y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n}, \boldsymbol{Y}^{[n]}), \\ \boldsymbol{Y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Q. 5 (0.5pts) *Les schémas* (2.2) *et* (2.3) *sont-ils explicites, implicites, à un pas, à pas multiples? Justifiez.* ■

Q. 6 (1.5pts) *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant les schémas d'Euler progressif et regressif.* ■

Q. 7 (2pts - algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PreCorVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par la méthode de prédiction-correction précédente.* ■

Q. 8 (0.5pt - algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (1) *à* (4) *par la méthode de prédiction-correction précédente.* ■

Exercice 3 : 8 points

De manière générale, un schéma a un pas pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{Y}^{[n+1]} = \boldsymbol{Y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{Y}^{[n]}, h) \tag{3.1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy vectoriel) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) \tag{3.2}$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i\ ,\ \boldsymbol{y} + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right),\ 1 \leqslant i \leqslant q \tag{3.3}$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{3.4}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.

Schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 : le tableau de Butcher associé s'écrit

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \tag{3.5}$$

Q. 1 (1.pt) *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3.5).* ∎

Q. 2 (2pts - algorithmique) *Ecrire la fonction* REDRK3VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel $m > 1$) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 en précisant les données et le(s) résultat(s) associés.* ∎

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{Y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 3** est donnée par

$$\boldsymbol{Y}^{[n+1]} = \boldsymbol{Y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right) \tag{3.6}$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 3** par

$$\boldsymbol{Y}^{[n+1]} = \boldsymbol{Y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right) \tag{3.7}$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{Y}^{[n]})$.

Q. 3 (2.5pts)

1. *Les schémas* (3.6) *et* (3.7), *sont-ils explicites ou implicites?*
2. *Les schémas* (3.6) *et* (3.7) *sont à pas multiples. Quel est le nombre de pas?*
3. *Expliquer le principe d'une méthode à pas multiples utilisant le schéma* (3.6). ∎

Q. 4 (2pts - algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDAB3VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (3.6) *en précisant les données et le(s) résultat(s) associés.* ∎

Q. 5 (0.5pts - algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (1) *à* (4) *par le schéma* (3.6). ∎