EXAMEN DU 17 MARS 2020

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

EXERCICE 1 : 2 points

Q. 1 *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ *et* $f \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$. *Montrer en utilisant des formules de Taylor, que pour tout* $h > 0$ *suffisament petit, on a*

$$f'(a) = \frac{4f(a+h) - f(a+2h) - 3f(a)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Q. 2 *Soit* $g \in\in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. *Montrer en utilisant des formules de Taylor, que pour tout* h *suffisament petit, on a*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{g(x+h, y) - 2g(x, y) + g(x-h, y)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2}$$

EXERCICE 2 : 10.5 points

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu'(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, && (1)\\ -u'(a) + 3u(a) &= \alpha, && (2)\\ u(b) &= \beta. && (3) \end{aligned}$$

où c est un réel strictement positif.

Q. 1 1. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

2. *Quelles sont les données du problème (1)-(3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
3. *Quelles sont les inconnues du problème (1)-(3)? (préciser le type)*
4. *Quelles sont les conditions initiales?*
5. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q. 2 1. *Expliciter la discrétisation régulière de* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

2. *Ecrire la fonction* DisReg *permettant de retourner cette discrétisation.*

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1)-(3) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= f_i, && (4)\\ (3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 &= 2h\alpha. && (5) \end{aligned}$$

Q. 3 1. *Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma (4) à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes* u_i, f_i, c *et* h*?*

2. *Expliquer en détail comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (2).*
3. *Donner une discrétisation détaillée du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5).*
4. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *(préciser les dimensions).*

Q. 5 *Ecrire la fonction* Assemble *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r & s & w & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r & s & w \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où s, r, w, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 *et* ν_3 *sont des réels donnés.*

Q. 6 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (6). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

Exercice 3 : 9.5 points

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x), \ \forall (t,x) \in]0;T]\times]a;b[, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ \forall x \in [a;b], \tag{2}$$

$$\mu u(t,a) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = v_a(t), \ \forall t \in [0;T], \tag{3}$$

$$u(t,b) = u_b(t), \ \forall t \in]0;T]. \tag{4}$$

avec $\mu > 0$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $\alpha(x) > 0$.

Q. 1 1. *Quelles sont les données du problème (1) à (4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

2. *Quelles sont les inconnues du problème (1) à (4)? (préciser le type)*
3. *Quelles sont les conditions initiales?*
4. *Quelles sont les conditions aux limites?*
5. *Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.*

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[0;T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des* t^n *et des* x_i.

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha_i \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1} \tag{5}$$

$$u_2^{n+1} - 4u_1^{n+1} + (3 + 2\mu\Delta x)u_0^{n+1} = 2\Delta x v_a(t^{n+1}). \tag{6}$$

Q. 3 1. *Expliquer en détail comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs* u_i^n, f_i^n, α_i, Δt, *et* Δx.

2. *Expliquer en détail comment le schéma (6) a été obtenu à partir de (3).*
3. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6).*
4. *Le schéma est-il implicite ou explicite?*
5. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?*

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 4 1. *Comment initialiser le vecteur* $\boldsymbol{U}^0$?

2. *Expliquer comment résoudre numériquement le problème (1) à (4) en utilisant (entre autres) les schémas (5) et (6).*
3. *On suppose les données du problème (1) à (4) fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6). On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, *ainsi que les fonctions écrites dans les autres exercices.*