Energétique 1ère année **Méthodes Numériques II**
Sup'Galilée **Année 2016-2017**

Examen du 1 septembre 2017

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

Exercice 1 : E.D.P. (11 points)

Soient α, β deux réels donnés et f, μ deux fonctions données et définies sur l'intervalle $[a; b]$ à valeurs réelles avec $\mu(x) > 0$.. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-u''(x) + \mu(x)u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[, \tag{1}$$
$$-u'(a) = \alpha. \tag{2}$$
$$u(b) = \beta, \tag{3}$$

Q. 1 1. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

2. *Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
3. *Quelle(s) est(sont) la(les) inconnue(s) du problème (1) à (3)? (préciser le type)*
4. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) initiale(s)?*
5. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) aux limites?* $\boxdot$

Q. 2 1. *Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.*

2. *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* DisReg *permettant d'obtenir cette discrétisation.* $\boxdot$

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à (3) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mu_i u_i = f_i, \tag{4}$$
$$3u_0 - 4u_1 + u_2 = 2\Delta x \alpha. \tag{5}$$

Q. 3 1. *Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, μ_i et Δx?*

2. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (4).*
3. *Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (2).*
4. *En déduire le schéma numérique global/complet associé au problème (1) à (3) en précisant le nombre d'équations, le nombre d'inconnues et son ordre.* $\boxdot$

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). $\boxdot$

Q. 5 *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* AssembleMat *retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $d \geqslant 3$, définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où pour tout $j \in [\![1,3]\!]$, α_j, β_j, ν_j sont des réels donnés. $\boxdot$

Q. 6 *On suppose les données du problème* (1) *à* (3) *fournies et la fonction* RSL *permettant la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ déjà implémentée : $\boldsymbol{x} \leftarrow$* RSL$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$. *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1) *à* (3) *basé sur (6). (Utiliser au maximum les fonctions)* $\boxdot$

EXERCICE 2 : E.D.O. (9 points)

Q. 1 1. *Que signifie les abréviations E.D.O.?*

2. *Donner la définition* ***détaillée*** *d'un problème de Cauchy vectoriel.* $\boxdot$

Pour résoudre numériquement un problème de Cauchy, différentes méthodes peuvent être utilisées. Dans le reste de l'exercice, nous allons nous focaliser sur les méthodes dites de **Prédiction-Correction**.

Q. 2 *Rappeler brièvement le principe générale d'une méthode de* ***Prédiction-Correction****.* $\boxdot$

Q. 3 *Ecrire la fonction algorithmique (ou Matlab)* REDPC2VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy* ***vectoriel*** *par une méthode de type* ***Prédiction-Correction****, utilisant les deux schémas d'ordre* 2 *suivants*

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right) \tag{1}$$

et

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right) \tag{2}$$

$\boxdot$

Application : Soit $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ deux fonctions vectorielles définies $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ représentant la position au cours du temps de deux objets dans l'espace.

On note $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \in [0, T]$.

On suppose que $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sont solutions du système différentiel suivant :

$$\frac{d^2\boldsymbol{q}}{dt^2}(t) = -gM_p \frac{\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{p}(t)}{\|\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{p}(t)\|^3} \tag{3}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t) = -gM_q \frac{\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{q}(t)}{\|\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{q}(t)\|^3} \tag{4}$$

avec comme positions initiales $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0 \in \mathbb{R}^3$, et comme vitesses initiales $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(0) = \boldsymbol{v}_p \in \mathbb{R}^3$, $\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}(0) = \boldsymbol{v}_q \in \mathbb{R}^3$. La contante gravitationnelle g est supposée donnée ainsi que les masses M_p et M_q des deux objets.

Q. 4 *Ecrire ce système différentiel sous la forme d'un problème de Cauchy.* $\boxdot$

Q. 5 (Matlab) 1. *Ecrire la fonction Matlab* FCAUCHY *associée au problème de Cauchy de la question précédente et correspondant à la fonction de Cauchy.*

2. *Ecrire un programme Matlab permettant de résoudre numériquement, à l'aide des fonctions* REDPC2VEC *et* FCAUCHY*, le problème 3-4 avec conditions initiales.*

3. *Donner la(les) commande(s) permettant de représenter sur une figure les approximations de $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$* $\boxdot$