

Ingénieurs Energétique 1ère année

Méthodes numériques (S6) - Dérivation numérique

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2022/02/01

- Chapitre I : Algorithmique numérique
- Chapitre II : Dérivation numérique**
- Chapitre III : Résolution numérique des E.D.O.
- Chapitre IV : Résolution numérique des E.D.P.

Chapitre II

Dérivation numérique

♥ Definition 0.1

Soit g une fonction. On dit que g se comporte comme un grand O de h^q quand h tend vers 0 si et seulement si il existe $H > 0$ et $C > 0$ tel que

$$|g(h)| \leq C|h|^q, \quad \forall h \in]-H, H[.$$

On note alors $g(h) = \mathcal{O}(h^q)$.



Proposition 0.2: Développement de Taylor

Soit f une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$ alors

- $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ il existe un $\xi \in]x, y[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^r \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - y)^{r+1} \quad (1)$$

- $\forall x \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $x + h \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(x, x+h), \max(x, x+h)[$ tel quel

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^r \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi) \quad (2)$$

ou encore

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^r \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \mathcal{O}(h^{r+1}). \quad (3)$$



Exercice 1

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q.1 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in [a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (4)$$

Q.2 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b]$, $\forall h > 0$ tel que $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (5)$$

Q.3 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (6)$$

Q.4 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x + h) - 2\varphi(x) + \varphi(x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (7)$$

**Exercice 2**

Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$

Q.1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (8)$$

Q.2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (9)$$

Q.3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x + ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.*

Q.4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x - ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.*

♥ Definition 0.3

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **discrétisation régulière de $[a, b]$ à N pas ou $N + 1$ points** l'ensemble des points $a + nh$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ où le pas h est donné par $h = (b - a)/N$.

On note $t^n = a + nh$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une **discrétisation régulière de $[a, b]$** et $(Dy)_n$ une approximation de $y'(t^n)$. On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \quad (10)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (11)$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \quad (12)$$

On a démontré le lemme suivant

Lemme 0.4

Si $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ alors

$$y'(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (13)$$

$$y'(t^n) = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (14)$$

Si $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$ alors

$$y'(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket. \quad (15)$$

♥ Definition 0.5

La différence $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est appelée **erreur de troncature au point t^n** . On dira que $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est d'ordre $p > 0$ si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|y'(t^n) - (Dy)_n| \leq Ch^p \iff y'(t^n) = (Dy)_n + \mathcal{O}(h^p).$$



Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation **régulière** de $[a, b]$ de pas h . On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q.1

- ① Déterminer en fonction de h et \mathbf{F} , un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

- ② Ecrire une fonction algorithmique [DerOrder1](#) permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de h , de calculer le vecteur \mathbf{V} précédent.

Q.2

- ① Connaissant uniquement le vecteur \mathbf{F} , déterminer un vecteur $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$W_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

- ② Ecrire une fonction algorithmique [DerOrder2](#) permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de h , de calculer le vecteur \mathbf{W} précédent.

Application

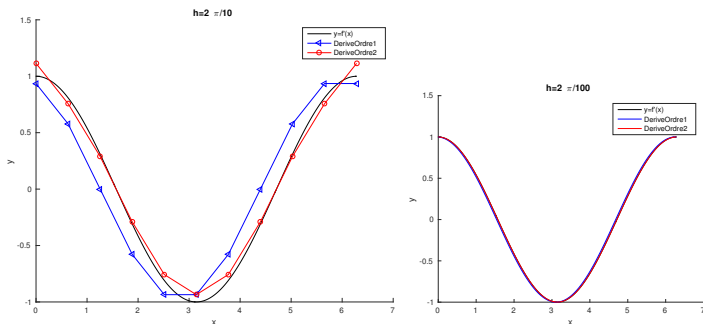


Figure: Représentation des dérivées numériques avec $f(x) := \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$. A gauche $h = \frac{2\pi}{10}$, à droite $h = \frac{2\pi}{100}$.

Application

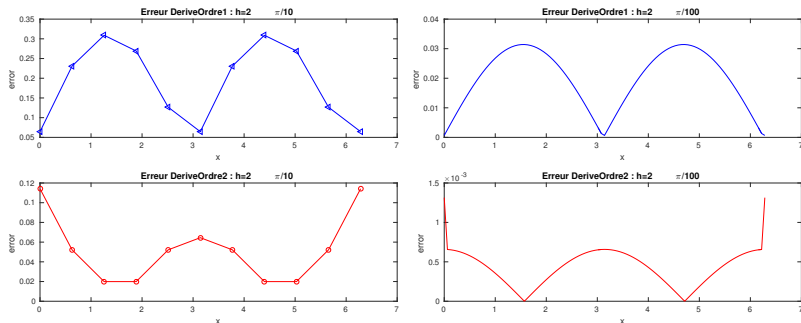


Figure: Erreur des dérivées numériques numériques avec $f(x) := \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$. A gauche $h = \frac{2\pi}{10}$, à droite $h = \frac{2\pi}{100}$.

- Dérivée ordre 1 :

h a été divisé par 10 \implies l'erreur, $\mathcal{O}(h)$, divisée par 10.

- Dérivée ordre 2 :

h a été divisé par 10 \implies l'erreur, $\mathcal{O}(h^2)$, divisée par 100.

Application

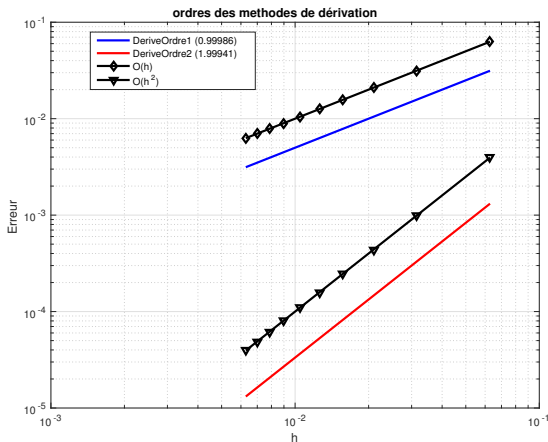


Figure: Dérivation numérique : mise en évidence de l'ordre des méthodes
Figure en échelle logarithmique : intérêt de *monter* en ordre.



Exercice 4

Q.1

- 1 *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes.*
- 2 *A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.*

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont `loglog`, `semilogx` et `semilogy`. Elles s'utilisent globalement comme la fonction `plot`.

Q.2 *Ajouter au programme précédent le code permettant de représenter graphiquement l'ordre des deux méthodes.*