Travaux dirigés - Algorithmique[1]

1 Numériques

Exercice 1

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction algorithmique `sum01` permettant de calculer

$$\sum_{k=1}^{m} k \cos\big(\frac{2\pi k}{m} t\big).$$

Exercice 2

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{R}$. On souhaite calculer

$$\prod_{n=1}^{k} (2n-1)\cos(2kz/n)^k$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* `prod01` *permettant de faire ce calcul en utilisant la fonction puissance* `power(x,y)` *ou* `x^y` *correspondant à* x^y.

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* `prod02` *permettant de faire ce calcul sans utiliser la fonction puissance* `power` *ou l'opérateur* `^`. *On rappelle que si* $k \in \mathbb{N}$ *alors* $x^k = \prod_{i=1}^{k} x$.

Exercice 3

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right\}.$$

Ecrire la fonction `SFT` permettant de calculer $x_n(t)$ correspondant à la série $x(t)$ tronquée au n-ième terme.

Exercice 4

Soient $(x_i)_{i=0}^{n}$ et $(y_k)_{k=1}^{m}$ des réels. Le réel z est donné par

$$z = \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} x_i \cos(\frac{i\pi}{n} y_k).$$

Q. 1 ***a.*** *Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer* y? *Préciser leurs types et leurs dimensions.*

b. *Ecrire la fonction* ***PS1*** *permettant de calculer* z. *Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.*

c. *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

Soient $(z_j)_{j=0}^{p}$, $p > 1$, les $p+1$ réels définis par

$$z_j = \prod_{k=1}^{m} \frac{2\pi j}{p} \sum_{i=0}^{n} x_i \cos(\frac{i\pi}{n} y_k), \ \forall j \in [\![0,p]\!].$$

Q. 2 ***a.*** *Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer* $(z_j)_{j=0}^{p}$? *Préciser leurs types et leurs dimensions.*

[1] Les énoncés sont parfois intentionnellement flous!

b. *Ecrire la fonction* ***PS2*** *permettant de calculer l'ensemble des* $(z_j)_{j=0}^{p}$*. Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.*

c. *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

Exercice 5

Dans cet exercice les notations suivantes seront utilisées. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(:,j)`. Si on écrit `v`$\leftarrow$`A(:,j)` alors l'accès aux éléments de `v` s'effectue avec la commande `v(i)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur colonne ou ligne de dimension m, alors `A(:,j)`$\leftarrow$`w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_i$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$.
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(i,:)` et si on écrit `u`$\leftarrow$`A(i,:)` alors l'accès aux éléments de `u` s'effectue avec la commande `u(j)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur ligne ou colonne de dimension n, alors `A(i,:)`$\leftarrow$`w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_j$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$.

Q. 1 *Soient* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*. Ecrire la fonction* `ProSca` *permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs.*

Q. 2 *Soient* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

b. *Ecrire la fonction* `ProMatVec1` *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

c. *Ecrire* $\boldsymbol{v}_i$ *comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées en début d'exercice.*

d. *Ecrire la fonction* `ProMatVec2` *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* `ProSca`.

Q. 3 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. *Ecrire la fonction* `ProMatMat1` *permettant de retourner* $\mathbb{G}$.

c. *Ecrire* $\mathbb{G}_{:,j}$ *(*j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{G}$*) comme un produit matrice vecteur*

d. *Ecrire la fonction* `ProMatMat2` *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la fonction* `ProMatVec2`.

Exercice 6

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.
Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^{m} \left((x + \sin(u_i)) \sum_{k=1}^{n} (k + (x - i)^2) \right)$$

Q. 1 **(a)** *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer* y*? Préciser les types et les dimensions.*

(b) *Ecrire la fonction* `PS` *permettant de calculer* y*. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

(c) *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^{p} \left((u_i - k\sin(x)) \prod_{j=1}^{p} (v_k + (x - j)^2) \right), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

Q. 2 **(a)** *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer* $\boldsymbol{z}$*? Préciser les types et les dimensions.*

(b) *Ecrire la fonction* `SP` *permettant de calculer* $\boldsymbol{z}$*. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

(c) *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.*

2 Graphiques

Exercice 7

Soient a et b deux réels, $a < b$. On note $(x_i)_{i=0}^n$ les $n+1$ points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ donnés par $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$.

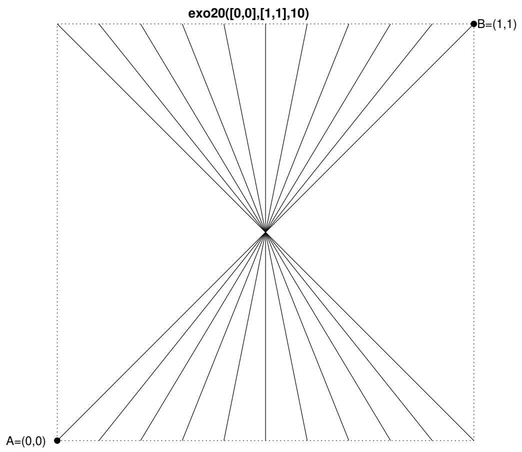
Q. 1 *Ecrire une fonction* `DisReg` *permettant de d'obtenir les* $n+1$ *points de la discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$.

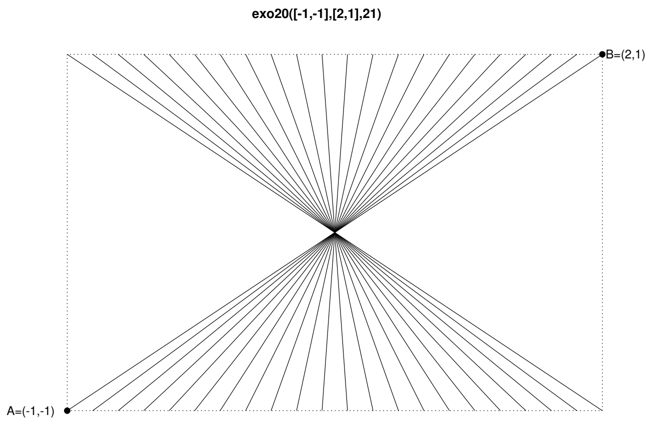
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A, (x_B, y_A), B et (x_A, y_B).
On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B, on dispose de la commande `plot(`$[x_A, x_B]$`,`$[y_A, y_B]$`)`.

Q. 2 *Ecrire une fonction* `exo20` *de paramètres* A, B *et* n *permettant de*

- *représenter les bords du rectangle,*
- *relier les points des bords haut et bas, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en* $n+1$ *points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.*

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :

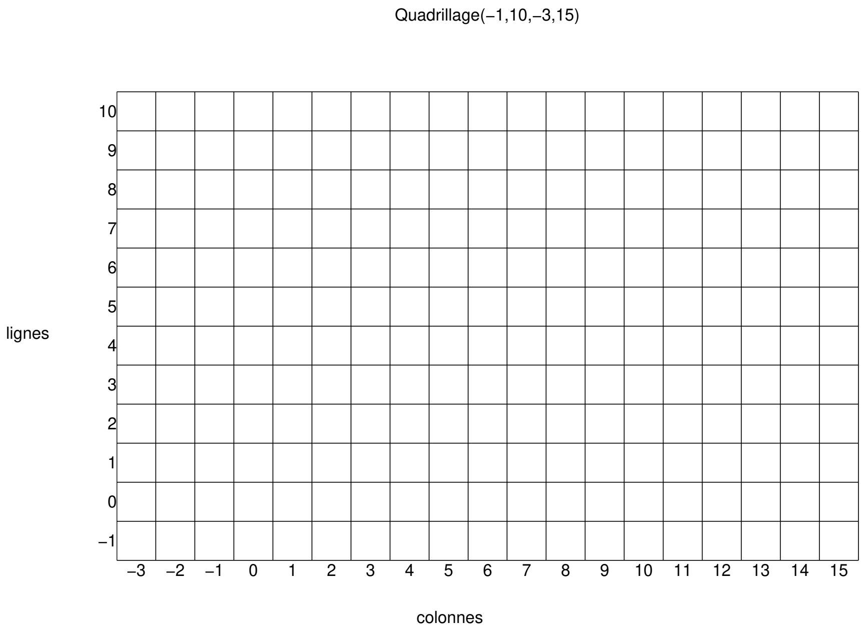




Pour les exercices suivants, on dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction

```
quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)
```

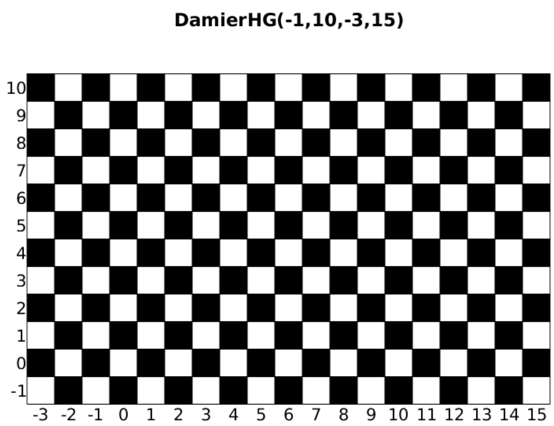
dont voici un exemple d'utilisation

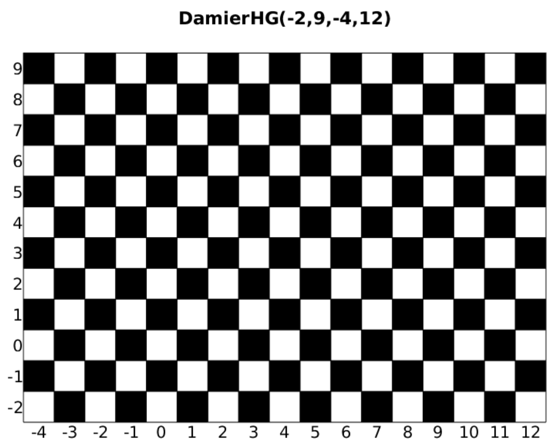


On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

Exercice 8

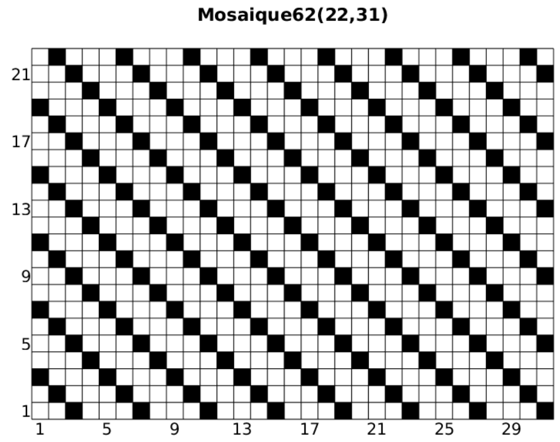
Ecrire la fonction DamierHG(imin,imax,jmin,jmax) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage obtenu par la commande Quadrillage(imin,imax,jmin,jmax) sachant que le pavé en haut à gauche d'un quadrillage doit toujours être noir. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

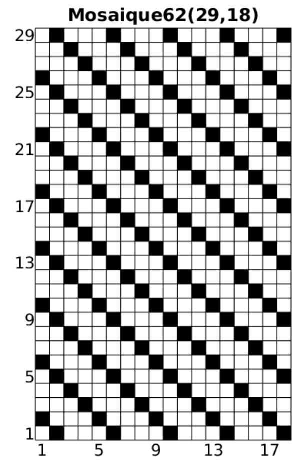




Exercice 9

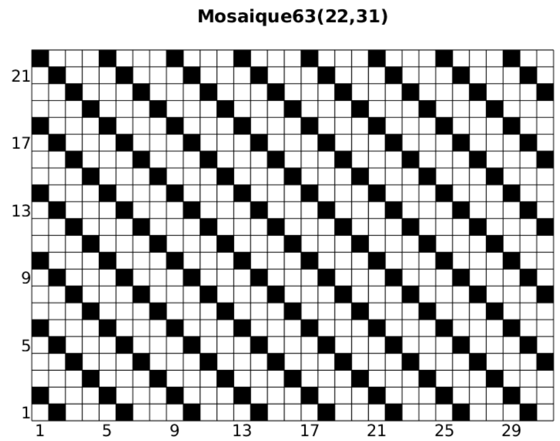
Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique62(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(1,n,1,m) sachant que la case en ligne 1 et colonne m est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

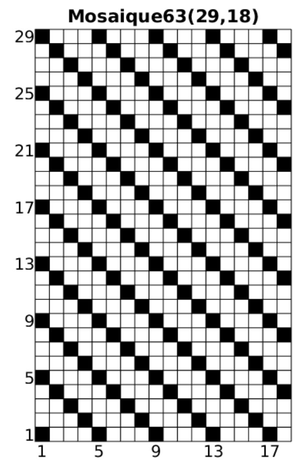




Exercice 10

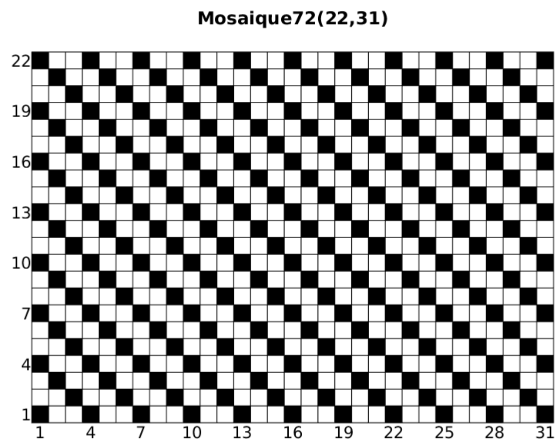
Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique63(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(1,n,1,m) sachant que la case en ligne n et colonne 1 est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

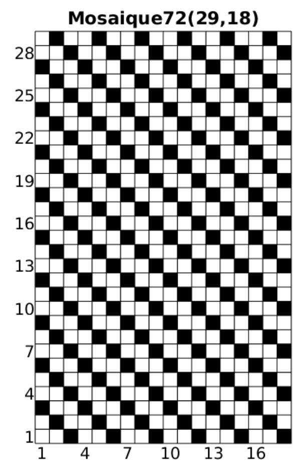




Exercice 11

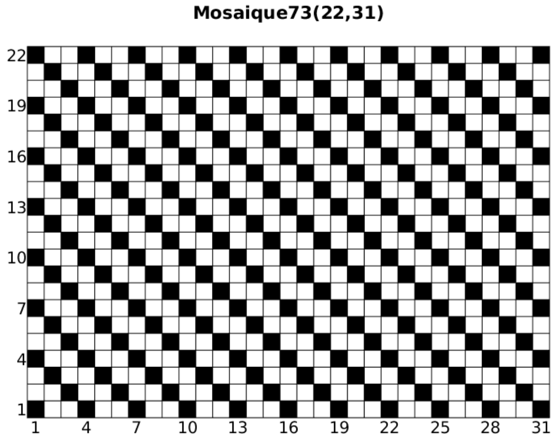
Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique72(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(1,n,1,m) sachant que la case en ligne 1 et colonne m est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

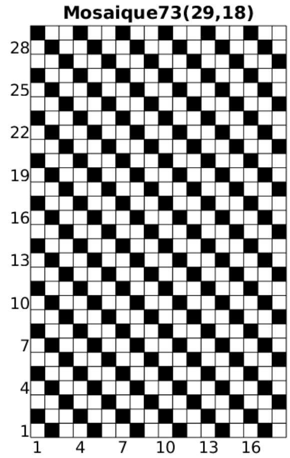




Exercice 12

Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique73(n,m) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(1,n,1,m) sachant que la case en ligne n et colonne 1 est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*





Exercice 13

Q. 1 *Ecrire la fonction Mosaique80(n) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage Quadrillage(−n,n,−n,n) Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*