TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.P. [A]

EXERCICE 1 (schéma étudié en cours)

Q. 1 *Ecrire la fonction* ASSEMBLEMAT1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{1}$$

où α, β et γ sont des réels donnés.

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante:

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

On note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas de discrétisation. Le schéma d'ordre 2 suivant

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha, \\ -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u_N &= \beta. \end{aligned}$$

vérifie

$$\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \tag{2}$$

Q. 2 *En prenant le jeu de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $f : x \mapsto \cos(x^2)$, écrire une fonction permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$ SOLVE$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*

Q. 3 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule* (2)*.*

EXERCICE 2 (enoncé du cours)

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2}$$

Q. 3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x + ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.*

Q. 4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x - ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.*

Exercice 3 (enoncé du cours)

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, & (1)\\ u'(a) &= \alpha, & (2)\\ u(b) &= \beta. & (3) \end{aligned}$$

où c est une fonction positive.

Q. 1 ***a.*** *Quelles sont les données du problème* (1)-(3) *? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

b. *Quelles sont les inconnues du problème* (1)-(3) *? (préciser le type)*

c. *Quelles sont les conditions initiales?*

d. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q. 2 *Construire une discrétisation régulière de* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{4}$$

Q. 3 ***a.*** *Expliquer comment le schéma* (4) *a été obtenu à partir de* (1) *et préciser ce que représente les termes* u_i, f_i, c_i *et* Δx *?*

b. *Donner l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des valeurs que peut prendre* i *dans le schéma* (1).

c. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{5}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *(préciser les dimensions).*

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1) *à* (3) *basé sur* (5). *(Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

Exercice 4 (Exercice 2, partiel 2, 2019/2020)

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu'(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, & (1)\\ -u'(a) + 3u(a) &= \alpha, & (2)\\ u(b) &= \beta. & (3) \end{aligned}$$

où c est un réel strictement positif.

Q. 1 ***a.*** *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème* (1)-(3) *? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

c. *Quelles sont les inconnues du problème* (1)-(3) *? (préciser le type)*

d. *Quelles sont les conditions initiales?*

e. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q. 2 ***a.*** *Expliciter la discrétisation régulière de* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

b. *Ecrire la fonction* DisReg *permettant de retourner cette discrétisation.*

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1)-(3) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i, \tag{4}$$

$$(3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 = 2h\alpha. \tag{5}$$

Q. 3 ***a***. *Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma (4) à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c et h?*

b. *Expliquer en détail comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (2).*

c. *Donner une discrétisation détaillée du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5).*

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).

Q. 5 *Ecrire la fonction* Assemble *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r & s & w & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r & s & w \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où s, r, w, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 et ν_3 sont des réels donnés.

Q. 6 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (6). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$* Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*