

TRAVAUX DIRIGÉS - E.D.P. [B]

EXERCICE 1 (Exercice 2, partiel 2, 2017/2018)

Soient α, β, D trois réels, $D > 0$, et f une fonction définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-Du''(x) + u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha. \quad (2)$$

$$3u(b) + u'(b) = \beta, \quad (3)$$

Q. 1 a. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

b. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

c. Quelles sont les conditions initiales?

d. Quelles sont les conditions aux limites?

Q. 2 a. Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

b. Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) DISREG permettant d'obtenir cette discrétisation.

On note $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-D \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + u_i = f_i. \quad (4)$$

Q. 3 a. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i et Δx ?

b. Donner l'ensemble \mathcal{E} des valeurs que peut prendre i dans le schéma (4).

c. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

d. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Q. 4 Montrer que le vecteur \mathbf{V} est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (5)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions).

Q. 5 Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) ASSEMBLEMAT retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

où pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, α_j, β_j, μ_j sont des réels donnés.

Q. 6 On suppose les données du problème (1) à (3) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ déjà implémentée : $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions)

EXERCICE 2

Soit $\begin{cases} u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \longmapsto u(t, x) \end{cases}$ une fonction suffisamment régulière. Voici deux exemples de formules de Taylor à l'ordre 3

$$u(t, x + h) = u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$u(t + h, x) = u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \mathcal{O}(h^3)$$

Q. 1 En écrivant des formules de Taylor à l'ordre 2, montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t + h, x) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t, x) - u(t - h, x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Q. 2 En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre 3, montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{u(t, x + h) - u(t, x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Q. 3 En utilisant des formules de Taylor à l'ordre 3, montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{-3u(t, x) + 4u(t, x + h) - u(t, x + 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{3u(t, x) - 4u(t, x - h) + u(t, x - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Q. 4 En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre 4, montrer que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{u(t, x + h) - 2u(t, x) + u(t, x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1)$$

EXERCICE 3 (Exercice 2, partiel 2, 2016/2017)

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in]0; T] \times]a; b[, \quad (1)$$

$$u(0, x) = g_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (2)$$

$$u(t, a) = g_a(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (3)$$

$$u(t, b) = g_b(t), \quad \forall t \in [0; T]. \quad (4)$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0, T > 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

Q. 1 a. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

b. Quelles sont les données du problème (1) à (4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

c. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (4)? (préciser le type)

d. Quelles sont les conditions initiales?

e. Quelles sont les conditions aux limites?

f. Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.

On note $t^n, n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ et $x_i, i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$ les discrétisations régulières des intervalles $[0; T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i .

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = f_i^n. \quad (5)$$

Q. 3 a. Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les valeurs u_i^n , f_i^n , Δt et Δx .

b. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (4) en utilisant le schéma (5).

c. Le schéma est-il explicite ou implicite?

d. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?

e. Expliquer comment améliorer l'ordre en espace du schéma (5).

On note \mathbf{U}^n les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $U_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$.

Q. 4 a. Comment initialiser le vecteur \mathbf{U}^0 ?

b. En supposant le vecteur \mathbf{U}^n déjà calculé, décrire le calcul du vecteur \mathbf{U}^{n+1} .

Q. 5 On suppose les données du problème (1) à (4) fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (4) en utilisant le schéma (5).

EXERCICE 4 (Exercice 3, partiel 2, 2019/2020)

Soient α, β, D trois réels, $D > 0$, et f une fonction définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-Du''(x) + u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha. \quad (2)$$

$$3u(b) + u'(b) = \beta, \quad (3)$$

Q. 1 a. Quelles sont les données du problème (1) à (3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

b. Quelles sont les inconnues du problème (1) à (3)? (préciser le type)

c. Quelles sont les conditions initiales?

d. Quelles sont les conditions aux limites?

Q. 2 a. Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

b. Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) DISREG permettant d'obtenir cette discrétisation.

On note x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$-D \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + u_i = f_i. \quad (4)$$

Q. 3 a. Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i , f_i et Δx ?

b. Donner l'ensemble \mathcal{E} des valeurs que peut prendre i dans le schéma (4).

c. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.

d. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $V_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Q. 4 Montrer que le vecteur \mathbf{V} est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (5)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions).

Q. 5 Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) ASSEMBLEMAT retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

où pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, α_j , β_j , μ_j sont des réels donnés.

Q. 6 On suppose les données du problème (1) à (3) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ déjà implémentée : $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions)