Travaux dirigés - E.D.P. [c]

Exercice 1

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x),\ \forall (t,x) \in]0;T]\times]a;b[, && (1)\\
u(0,x) &= u_0(x),\ \forall x \in [a;b], && (2)\\
\mu(t)u(t,a) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,a) &= v_a(t),\ \forall t \in [0;T], && (3)\\
u(t,b) &= u_b(t),\ \forall t \in]0;T]. && (4)
\end{aligned}$$

avec $\alpha(x) > 0$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $\mu(t) > 0$.

Q. 1 ***a***. *Quelles sont les données du problème (1) à (4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

b. *Quelles sont les inconnues du problème (1) à (4)? (préciser le type)*

c. *Quelles sont les conditions initiales?*

d. *Quelles sont les conditions aux limites?*

e. *Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.*

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[0;T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i.*

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha_i \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} &= f_i^n && (5)\\
u_2^n - 4u_1^n + (3 + 2\mu^n \Delta x)u_0^n &= 2\Delta x v_a(t^n). && (6)
\end{aligned}$$

Q. 3 ***a***. *Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs u_i^n, f_i^n, μ^n, α_i, Δt, et Δx.*

b. *Expliquer comment le schéma (6) a été obtenu à partir de (3).*

c. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6).*

d. *Le schéma est-il implicite ou explicite?*

e. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?*

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 4 ***a***. *Comment initialiser le vecteur $\boldsymbol{U}^0$?*

b. *En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^n$ connu, expliquer la manière de dterminer le vecteur $\boldsymbol{U}^{n+1}$?*

c. *Ecrire une fonction algorithmique `solveEDP` permettant de résoudre le problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6). Cette fonction devra retourner les discrétisations en temps et en espace ainsi que l'ensemble des $\boldsymbol{U}^n$, $\forall n \in [\![0, N_t]\!]$.*

d. *Construire un jeu de données pour lequel $u(t,x) = \sin(t)\cos(x)$ est solution du problème (1) à (4).*

e. *Ecrire un algorithme utilisant ce jeu de données et résolvant numériquement le problème (1) à (4).*

Exercice 2 (cours)

Q. 1 *Ecrire la fonction* ASSEMBLEMATGEN1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où α, β, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 *et* b_3 *sont des réels donnés.*

Q. 2 *Ecrire la fonction* SNDMBRGEN1D *retournant le vecteur* $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^d$ *défini par*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{d-2} \\ \beta \end{pmatrix} \tag{2}$$

où α, β, $c_1, \dots, c_{d-2}$ *sont des réels donnés.*

EXERCICE 3 (cours)

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante: trouver $u : [0,T] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x), \qquad \forall (t,x) \in]0,T] \times]a,b[, \tag{1}$$
$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \forall x \in [a,b] \tag{2}$$
$$-D\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = \alpha(t), \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3}$$
$$u(t,b) = \beta(t), \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4}$$

où $a < b$, $D > 0$ (coefficient de diffusivité), $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\beta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : [0,T] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.
Les discrétisations sont données par

$$x_i = a + i\Delta_x, \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \qquad \text{avec } \Delta_x = (b-a)/N_x$$
$$t^n = n\Delta_t, \qquad \forall n \in [\![0, N_t]\!], \qquad \text{avec } \Delta_t = T/N_t.$$

Un schéma numérique d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace pour (1) est donné par:

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta_t} - D\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta_x^2} = \boldsymbol{f}_i^n, \ \forall n \in]\!]0, N_t]\!], \ \forall i \in]\!]0, N_x[\![\tag{5}$$

avec $\boldsymbol{f}_i^n = f(t^n, x_i)$ et (en espérant) $u_i^n \approx u(t^n, x_i)$.
Un schéma numérique d'ordre 2 pour (3) est donné par:

$$3u_0^n - 4u_1^n + u_2^n = 2\frac{\Delta_x}{D}\alpha(t^n) \tag{6}$$

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 1 ***a.*** *Comment initialiser le vecteur* $\boldsymbol{U}^0$ *?*

b. *En supposant le vecteur* $\boldsymbol{U}^{n-1}$ *connu, montrer que le vecteur* $\boldsymbol{U}^n$ *est solution d'un système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{b}^n$ *où l'on explicitera la matrice* $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{b}^n$.

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* HEAT1DIM *permettant de retourner la discrétisation en temps, la discrétisation en espace et l'ensemble des* u_i^n, $i \in [\![0, N_x]\!]$, $n \in [\![1, N_t]\!]$ *calculés par le schéma* ***implicite*** *en temps pour l'EDP (1) à (4).*

Q. 3 *Ecrire un programme utilisant cette fonction et permettant de calculer la solution numérique d'un problème dont on connait la solution exacte.*

Exercice 4 (Exercice 2, partiel 2, 2016/2017)

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta u(t,x) = f(t,x), \ \forall (t,x) \in]0;T] \times]a;b[, \tag{1}$$

$$u(0,x) = g_0(x), \ \forall x \in [a;b], \tag{2}$$

$$u(t,a) = g_a(t), \ \forall t \in [0;T], \tag{3}$$

$$u(t,b) = g_b(t), \ \forall t \in]0;T]. \tag{4}$$

avec $\alpha, \ \beta$ deux réels, $\alpha > 0$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1 ***a.*** *Quelles sont les données du problème (1) à (4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

b. *Quelle(s) est(sont) la(les) inconnue(s) du problème (1) à (4)? (préciser le type)*

c. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) initiale(s)?*

d. *Quelle(s) est(sont) la(les) condition(s) aux limites?*

e. *Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.*

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[0;T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i.*

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta u_i^n = f_i^n. \tag{5}$$

Q. 3 ***a.*** *Le schéma (5) est-il explicite ou implicite en temps? Justifier.*

b. *Expliquer comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs u_i^n, f_i^n, Δt et Δx.*

c. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (4) en utilisant le schéma (5).*

d. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?*

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 4 ***a.*** *Comment initialiser le vecteur $\boldsymbol{U}^0$?*

b. *En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^{n-1}$ déjà calculé, montrer que le vecteur $\boldsymbol{U}^n$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{b}^{n-1} \tag{6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}^{n-1}$ (préciser les dimensions).

Q. 5 *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $d \geqslant 3$, définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \nu & \mu & \nu & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \nu & \mu & \nu \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où μ, ν, c_1, c_2 et c_3 sont des réels donnés.

Q. 6 *On dispose de la fonction* RSL *permettant la résolution d'un système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$: Ecrire une fonction algorithmique* solveEDP *permettant de resoudre numériquement l'EDP (1) à (4) à l'aide du schéma (5) et retournant la discrétisation en temps, la discrétisation en espace et l'ensemble des u_i^n, $i \in [\![0, N_x]\!]$, $n \in [\![1, N_t]\!]$ calculés à l'aide, entre autres, à l'aide du schéma (5).*

Q. 7 ***a.*** *Proposer un jeu de données pour lequel la solution exacte de (1) à (4) est $u(t,x) = \cos(t)\sin(x)$.*

b. *Ecrire un programme algorithmique utilisant la fonction* solveEDP *et le jeu de données précédent pour résoudre (1) à (4)*