Examen du 6 avril 2021

durée : 2h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 : E.D.O. (10 points)

Q. 1 **(a).** *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

(b). *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

(c). *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

(d). *Que cherche-t'on?* □

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ *($a < b$) en $n + 1$ points.* □

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 3 :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \tag{3}$$

Q. 3 *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3).* □

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{4}(\boldsymbol{k}_1 + 3\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{3}\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{k}_2), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{4}$$

Q. 4 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (4). □

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - 16\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + 5\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{5}$$

Q. 5 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (5). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* □

Q. 6 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedPM3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (5). ☐

Application: Considérons le système mécanique de deux masses m_1 et m_2 attachées entre elles horizontalement par des ressorts de raideur k_1, k_2, et k_3. Les positions au cours du temps des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont données par les fonctions x_1 et x_2.

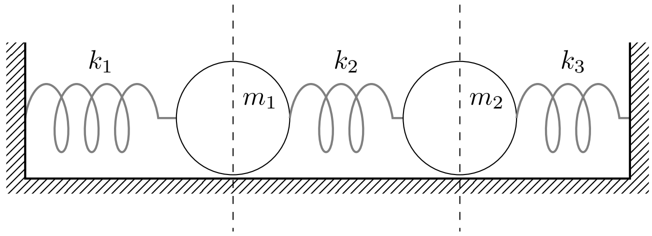

Figure 1: Positions d'équilibre

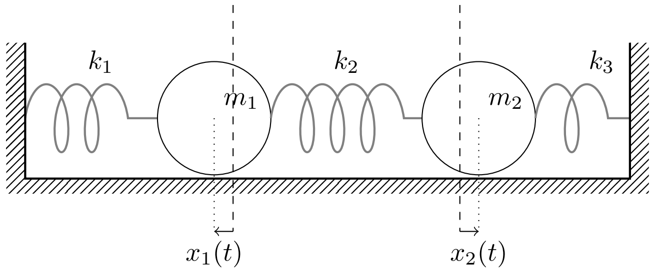

Figure 2: En mouvement

Le système d'équations de mouvement du système s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0 & \text{(6a)} \\ m_2\ddot{x}_2(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2x_1(t) = 0 & \text{(6b)} \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$. Le temps final T sera égal à 20.

Q. 7 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* ☐

Q. 8 (Algorithmique) *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (6a)-(6b) *avec les données initiales spécifiées. On prendra* $m_1 = 1/2$, $m_2 = 2/3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3/2$ *et* $k_3 = 2$. *Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions* x_1 *et* x_2. *On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *(function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐

Exercice 2 : E.D.P. (10 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[, \quad (1)$$
$$u(a) = \alpha, \quad (2)$$
$$u'(b) + 2u(b) = \beta. \quad (3)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et c est une fonction strictement positive.

Q. 1 **(a)**. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

(b). *Quelles sont les données du problème* (1)-(3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

(c). *Quelles sont les inconnues du problème* (1)-(3)*? (préciser le type)*

(d). *Quelles sont les conditions initiales?*

(e). *Quelles sont les conditions aux limites?* ☐

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1) à (3) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i, \tag{4}$$

$$(3 + 4h)u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} = 2h\beta. \tag{5}$$

Q. 2 **(a).** *Expliquer en détail comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c_i et h?*

(b). *Expliquer en détail comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (3).*

(c). *Donner une discrétisation détaillée du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5).*

(d). *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.* ☐

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). ☐

Q. 4 *Ecrire la fonction* Assemble *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r_1 & s_1 & t_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r_{d-2} & s_{d-2} & t_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où r_i, s_i, t_i, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 et ν_3 sont des réels donnés. ☐

Q. 5 *Ecrire la fonction algorithmique* resEDP *permettant de résoudre le problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5). Cette fonction devra retourner la discrétisation $(x_i)_{i=0}^{N}$ de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas de discrétisation et l'ensemble des $(u_i)_{i=0}^{N}$.* ☐

Q. 6 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) utilisant la fonction* resEDP *dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x^2)$. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour celà, on utilisera la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐

Q. 7 *Proposer un algorithme complet permettant de vérifier graphiquement l'ordre du schéma. Pour celà, on utilisera la fonction* Loglog(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y en utilisant une échelle logarithmique suivant l'axe des abscisses et suivant l'axe des ordonnées (function similaire à la fonction* `loglog` *de Matlab).* ☐