

EXAMEN DU 29 MARS 2022
durée : 2h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points) (10.25 points)

[0.25 PTS] **Q. 1 (a).** Que signifie l'abréviation E.D.O.?

[0.5 PTS] **(b).** Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy **vectoriel**.

[0.25 PTS] **(c).** Quelles sont les données d'un problème de Cauchy **vectoriel**?

[0.25 PTS] **(d).** Que cherche-t'on?

[0.5 PTS] **Q. 2** Ecrire une fonction algorithmique **DisReg** permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points.

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (1)$$

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de \mathbf{f} (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (2)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [1,q]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in [1,q]} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in [1,q]} \in \mathbb{R}^q$.

On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} & \frac{5}{18} \end{array} \quad (3)$$

[0.0 PTS] **Q. 3** Rappeler précisément la définition d'un problème de Cauchy **vectoriel**.

[1.5 PTS] **Q. 4** Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (3). On admettra que ce schéma est d'ordre 3.

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{18} h(5\mathbf{k}_1 + 16\mathbf{k}_2 - 3\mathbf{k}_3) \\ \text{avec} & \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ & \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t^n + \frac{3}{4}h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{3}{4}h\mathbf{k}_1), \\ & \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{3}h(7\mathbf{k}_1 - 4\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{y}^{[0]} & \text{donné.} \end{cases} \quad (4)$$

[1.5 PTS] **Q. 5 (Algorithmique)** Ecrire la fonction algorithmique **REDRK3** permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (4).

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h \left(\frac{23}{12} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) - \frac{4}{3} \mathbf{f}(t^{n-1}, \mathbf{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12} \mathbf{f}(t^{n-2}, \mathbf{y}^{[n-2]}) \right) \quad (5)$$

[1.5 PTS] **Q. 6** Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5). Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».

[1.5 PTS] **Q. 7** (algorithmique) Ecrire la fonction algorithmique `REDPM3` permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma (5).

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)) + x_2(t) = \cos(t) & (6a) \\ \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_3(t) - \dot{x}_1(t)) + x_3(t) = \sin(t) & (6b) \\ \ddot{x}_3(t) - \nu_3(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) = 0 & (6c) \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$, $x_3(0) = 3$, $\dot{x}_3(0) = 1/3$. Le temps final T sera égal à 10.

[1.5 PTS] **Q. 8** Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.

[1 PTS] **Q. 9** (Algorithmique) Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre (6a)-(6b)-(6c) avec les données initiales spécifiées. On prendra $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1/2$ et $\nu_3 = 1/3$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 , x_2 et x_3 . On utilisera pour cela la fonction `PLOT(X,Y)` qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction `plot` de Matlab).

EXERCICE 2 : E.D.P. (10 points) (11.5 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + c(x)u'(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha, \quad (2)$$

$$u'(b) + \nu u(b) = \beta. \quad (3)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et c est une fonction strictement positive.

[0.25 PTS] **Q. 1** (a). Que signifie l'abréviation E.D.P.?

[0.5 PTS] (b). Quelles sont les données du problème (1)-(3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

[0.25 PTS] (c). Quelles sont les inconnues du problème (1)-(3)? (préciser le type)

[0.25 PTS] (d). Quelles sont les conditions initiales?

[0.25 PTS] (e). Quelles sont les conditions aux limites?

On note x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1) à (3) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i, \quad (4)$$

$$(3 + 2\nu h)u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} = 2h\beta. \quad (5)$$

[1.5 PTS] **Q. 2** (a). Expliquer en détail comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i , f_i , c_i et h ?

[1.0 PTS] (b). Expliquer en détail comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (3).

[0.25 PTS] (c). Donner une discrétisation détaillée du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5).

[0.25 PTS] (d). Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $V_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Q. 3 Montrer, de manière détaillée, que le vecteur \mathbf{V} est solution d'un système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (6)$$

[2.0 PTS] en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions).

Q. 4 Ecrire la fonction **CREMAT** retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & p_{d-2} & q_{d-2} & r_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

[1.0 PTS] où $p_i, q_i, r_i, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2$ et f_3 sont des réels donnés. □

Q. 5 Ecrire la fonction algorithmique **RESEDP** permettant de résoudre le problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5). Cette fonction devra retourner la discrétisation $(x_i)_{i=0}^N$ de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas de discrétisation et

[1.5 PTS] l'ensemble des $(u_i)_{i=0}^N$. □

Q. 6 Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) utilisant la fonction **RESEDP** dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^2)$. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour cela, on utilisera la fonction **PLOT**(X, Y) qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction **plot** de Matlab). □

[1 PTS]

Q. 7 Proposer un algorithme complet permettant de vérifier graphiquement l'ordre du schéma. Pour cela, on utilisera la fonction **LOGLOG**(X, Y) qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y en utilisant une échelle logarithmique suivant l'axe des abscisses et suivant l'axe des ordonnées (fonction similaire à la fonction **loglog** de Matlab). □

[1.5 PTS]