Energétique 1ère année **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2018-2019**

EXAMEN DU 12 FÉVRIER 2019

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

EXERCICE 1 : 10 points

Q. 1 1. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

3. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

4. *Que cherche-t'on?* □

Le schéma de Heun d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}\left(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right)\right]. \tag{1}$$

Q. 2 *Expliquer en détail comment utiliser ce schéma pour résoudre un problème de Cauchy vectoriel en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

Q. 3 (algorithmique) *En minimisant le nombre d'appels à la fonction de Cauchy* $\boldsymbol{f}$*, écrire une fonction* REDHEUNVEC *retournant l'ensemble des couples* $(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$ *calculés par le schéma* (1) *(Heun ordre* 2*) pour la résolution d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.* □

On rappelle le schéma d'Adams-Moulton implicite d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right). \tag{2}$$

Q. 4 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy* ***vectoriel*** *par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant le schéma de Heun* (1) *et le schéma d'Adams-Moulton implicite* (2)*.* □

Q. 5 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PRECORVEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy* ***vectoriel*** *par la méthode de prédiction-correction précédente.* □

Application: On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$\beta^{(4)}(t) - \sin(t)\beta^{(3)}(t) + \cos(t)\beta(t) = \sin(t), \quad \forall t \in]0, 5], \tag{3}$$

$$\beta(0) = 1, \quad \beta^{(1)}(0) = 0, \quad \beta^{(2)}(0) = 1/2, \quad \beta^{(3)}(0) = -1/2 \tag{4}$$

Ici, $\beta^{(k)}(t)$ note la dérivée k-ième de la fonction β en t.

Q. 6 *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O.* (3)-(4)*.* □

Q. 7 1. *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (3)-(4) *par la méthode de prédiction-correction précédente.*

2. *Comment représenter graphiquement les approximations de* β *et de* $\beta^{(1)}$ *(dérivée de* β*) obtenues par l'algorithme complet précédent sachant que* β *est la solution de l'E.D.O.* (3)-(4)*. On utilisera la fonction* PLOT(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *(function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □

Exercice 2 : 10 points

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right),\ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 3 :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3).* ☐

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{4}(\boldsymbol{k}_1 + 3\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{3}\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{k}_2), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{4}$$

Q. 2 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (4). ☐

La **méthode de Nyström** explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n-1]} + \frac{h}{3}\left(7\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - 2\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{5}$$

Q. 3 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (5). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* ☐

Q. 4 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedNI3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (5). ☐

Application: Considérons le système mécanique de trois masses m_1, m_2 et m_3 attachées entre elles horizontalement par des ressorts de raideur k_1, k_2, k_3 et k_4. Les positions au cours du temps des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont données par les fonctions x_1, x_2 et x_3.

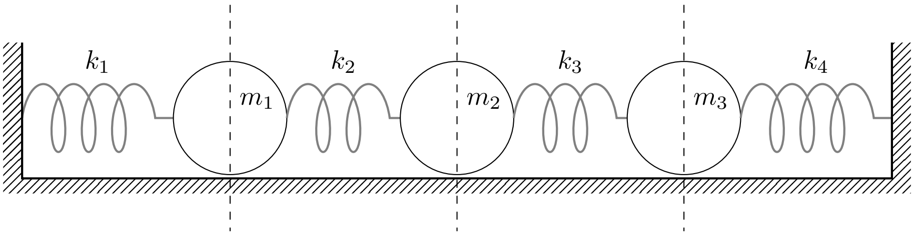

Figure 1: Positions d'équilibre

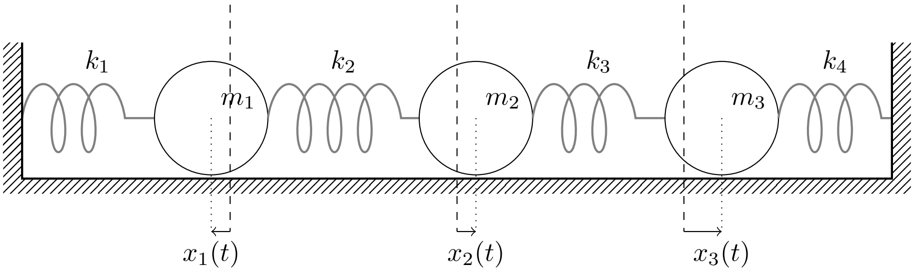

Figure 2: En mouvement

Le système d'équations de mouvement du système s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) &= 0 \quad (6a) \\ m_2\ddot{x}_2(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2x_1(t) - k_3x_3(t) &= 0 \quad (6b) \\ m_3\ddot{x}_3(t) + (k_3 + k_4)x_3(t) - k_3x_2(t) &= 0 \quad (6c) \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$, $x_3(0) = 1/3$ et $\dot{x}_2(0) = -1/2$. Le temps final T sera égal à 20.

Q. 5 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.*

Q. 6 (Algorithmique) *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (6a)-(6b)-(6c) *avec les données initiales spécifiées. On prendra $k_1 = k_4 = 1$ et $k_2 = k_3 = 2$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1, x_2 et x_3. On utilisera pour celà la fonction* PLOT(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □