Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Ingénieurs ENER 1 - Méthodes numériques (S6)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2023/02/09

Plan du cours

Chapitre I	:	Algorithmique numérique
Chapitre II	:	**Dérivation numérique**
Chapitre III	:	Résolution numérique des E.D.O.
Chapitre IV	:	Résolution numérique des E.D.P.

Deuxième partie II

Dérivation numérique

Plan

♥ Definition 1.1

Soit g une fonction. On dit que g **se comporte comme un grand O de** h^q quand h tend vers 0 si et seulement si il existe $H > 0$ et $C > 0$ tel que

$$|g(h)| \leqslant C|h|^q, \quad \forall h \in]-H, H[.$$

On note alors $g(h) = \mathcal{O}(h^q)$.

Proposition 1.2: Développement de Taylor

Soit f une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$ alors

- $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ il existe un $\xi \in] \min(x, y, \max(x, y)[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{r} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x-y)^{r+1} \tag{1}$$

- $\forall x \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $x + h \in [a, b]$, il existe $\xi \in] \min(x, x+h), \max(x, x+h)[$ tel quel

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{r} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi) \tag{2}$$

ou encore

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{r} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \mathcal{O}(h^{r+1}). \tag{3}$$

Exercice 1

Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q.1 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in [a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{4}$$

Q.2 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b]$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{5}$$

Q.3 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$ *et* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{6}$$

Q.4 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$ *et* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{7}$$

TD

Exercice 2

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q.1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{8}$$

Q.2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{9}$$

Q.3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre* 2 *de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x + ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

Q.4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre* 2 *de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x - ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

Plan

Definition 2.1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **discrétisation régulière de** $[a, b]$ **à** N **pas ou** $N+1$ **points** l'ensemble des points $a + nh$, $n \in [\![0, N]\!]$ où le pas h est donné par $h = (b-a)/N$.

On note $t^n = a + nh$, $n \in [\![0, N]\!]$, une **discrétisation régulière de** $[a, b]$ et $(Dy)_n$ une approximation de $y'(t^n)$. On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation

$$(Dy)_n^P = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in [\![0, N-1]\!] \tag{10}$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation

$$(Dy)_n^R = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in [\![1, N]\!] \tag{11}$$

- **différence finie centrée** l'approximation

$$(Dy)_n^C = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in [\![1, N-1]\!] \tag{12}$$

On a démontré le lemme suivant

Lemme 2.2

Si $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *alors*

$$\begin{aligned} y'(t^n) &= \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0, N-1]\!], & (13)\\ y'(t^n) &= \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![1, N]\!]. & (14) \end{aligned}$$

Si $y \in \mathcal{C}^3([a,b])$ *alors*

$$y'(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![1, N-1]\!]. \tag{15}$$

♥ Definition 2.3

La différence $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est appelée **erreur de troncature au point** t^n. On dira que $|y'(t^n) - (Dy)_n|$ est d'ordre $p > 0$ si il existe une constance $C > 0$ telle que

$$|y'(t^n) - (Dy)_n| \leqslant Ch^p \iff y'(t^n) = (Dy)_n + \mathcal{O}(h^p).$$

TD

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0,N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ de pas h. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$.

Q.1

1. *Déterminer en fonction de h et $\boldsymbol{F}$, un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N]\!].$$

2. *Ecrire une fonction algorithmique DerOrder1 permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de h, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédent.*

Q.2

1. *Connaissant uniquement le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![0,N]\!]$$

2. *Ecrire une fonction algorithmique DerOrder2 permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de h, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédent.*

Application

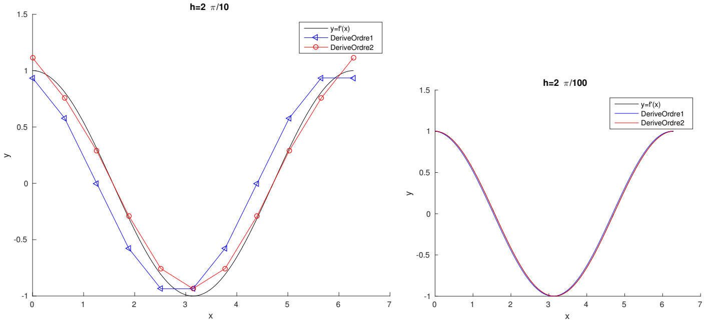

Figure – Représentation des dérivées numériques avec $f(x) := sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$. A gauche $h = \frac{2\pi}{10}$, à droite $h = \frac{2\pi}{100}$.

Application

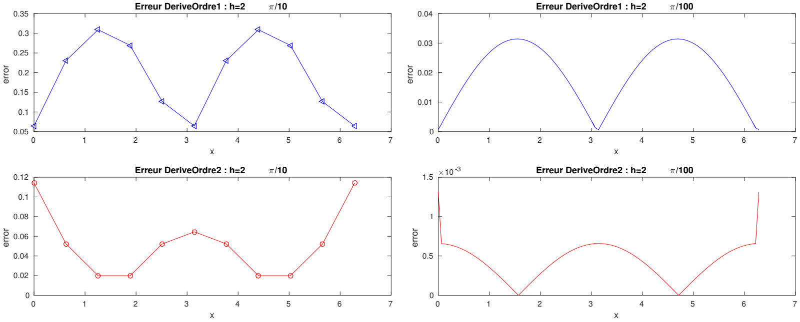

Figure – Erreur des dérivées numériques numériques avec $f(x) := sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$. A gauche $h = \frac{2\pi}{10}$, à droite $h = \frac{2\pi}{100}$.

- Dérivée ordre 1 :

  h a été divisé par 10 $\Longrightarrow$ l'erreur, $\mathcal{O}(h)$, divisée par 10.

- Dérivée ordre 2 :

  h a été divisé par 10 $\Longrightarrow$ l'erreur, $\mathcal{O}(h^2)$, divisée par 100.

Application

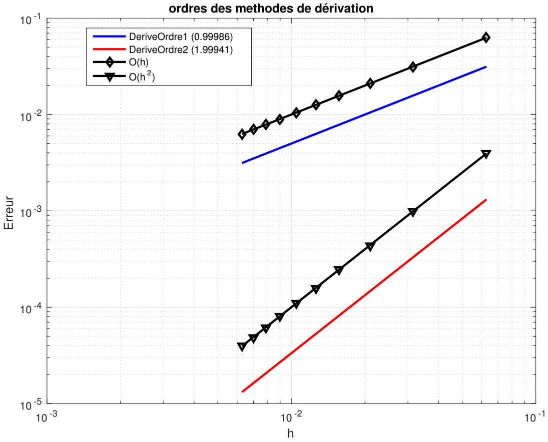

Figure – Dérivation numérique : mise en évidence de l'ordre des méthodes

Figure en échelle logarithmique : intérêt de *monter* en ordre.

TD

Exercice 4

Q.1

1. *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes.*
2. *A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.*

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont loglog, semilogx et semilogy. Elles s'utilisent globalement comme la fonction plot.

Q.2 *Ajouter au programme précédent le code permettant de représenter graphiquement l'ordre des deux méthodes.*