EXAMEN DU 31 AOÛT 2022

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points)

Q. 1 **(a).** *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

(b). *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

(c). *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

(d). *Que cherche-t'on?* ☐

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ *($a < b$) en $n + 1$ points.* ☐

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \tag{3}$$

Q. 3 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (3). On admettra que ce schéma est d'ordre 3.* ☐

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{24}h(7\boldsymbol{k}_1 + 25\boldsymbol{k}_2 - 8\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{4}{5}h, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{4}{5}h\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{8}h(13\boldsymbol{k}_1 - 5\boldsymbol{k}_2)), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{4}$$

Q. 4 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (4).* ☐

Pour résoudre numériquement un problème de Cauchy, différentes méthodes peuvent être utilisées. Dans le reste de l'exercice, nous allons nous focaliser sur les méthodes dites de **Prédiction-Correction**. Soient les deux schémas suivants d'ordre 3:

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\left(\frac{23}{12}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \frac{4}{3}\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + 8\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]})\right) \tag{6}$$

Q. 5 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type* ***Prédiction-Correction*** *utilisant les deux schémas* (5) *et* (6). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* ☐

Q. 6 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedPC3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par les schémas* (5) *et* (6). ☐

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \dddot{x}_1(t) - 3(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) + 4\dot{x}_2(t) + x_1(t) & = \sin(t) \quad (7a) \\ \dddot{x}_2(t) - 4(\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)) + 2\dot{x}_1(t) - x_2(t) & = \cos(t) \quad (7b) \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\ddot{x}_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$, $\ddot{x}_2(0) = 3$. Le temps final T sera égal à 10.

Q. 7 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* ☐

Q. 8 (Algorithmique) *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (7a)-(7b) *avec les données initiales spécifiées. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2. On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐

Exercice 2 : E.D.P. (10 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, & (1) \\ -u'(a) + 3u(a) &= \alpha \in \mathbb{R}, & (2) \\ u(b) &= \beta \in \mathbb{R}. & (3) \end{aligned}$$

où c est une fonction strictement positive.

Q. 1 **(a).** *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

(b). *Quelles sont les données du problème* (1)-(3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

(c). *Quelles sont les inconnues du problème* (1)-(3)*? (préciser le type)*

(d). *Quelles sont les conditions initiales?*

(e). *Quelles sont les conditions aux limites?* ☐

On note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1)-(3) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i &= f_i, & (4) \\ (3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 &= 2h\alpha. & (5) \end{aligned}$$

Q. 2 **(a).** *Expliquer en détail comment le schéma* (4) *a été obtenu à partir de* (1) *et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c_i et h?*

(b). *Expliquer en détail comment le schéma* (5) *a été obtenu à partir de* (2).

(c). *Donner une discrétisation détaillée du problème* (1) *à* (3) *en utilisant les deux schémas* (4) *et* (5).

(d). *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.* ☐

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \quad (6)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). ☐

Q. 4 *Ecrire la fonction* ASSEMBLE *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r_1 & s_1 & t_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r_{d-2} & s_{d-2} & t_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où r_i, s_i, t_i, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 *et* ν_3 *sont des réels donnés.* □

Q. 5 *Ecrire la fonction algorithmique* resEDP *permettant de résoudre le problème* (1) *à* (3) *en utilisant les schémas* (4) *et* (5)*. Cette fonction devra retourner la discrétisation* $(x_i)_{i=0}^N$ *de l'intervalle* $[a, b]$ *avec* N *pas de discrétisation et l'ensemble des* $(u_i)_{i=0}^N$. □

Q. 6 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1) *à* (3) *utilisant la fonction* resEDP *dont la solution exacte sera* $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x^2)$*. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour celà, on utilisera la fonction* PLOT(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *(function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □