Travaux dirigés - Dérivation numérique

Exercice 1

Soit $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q. 1 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in [a, b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x + h) \in [a, b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1}$$

Q. 2 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a, b]$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x - h) \in [a, b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{2}$$

Q. 3 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a, b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x + h) \in [a, b]$ *et* $(x - h) \in [a, b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3}$$

Q. 4 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a, b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x + h) \in [a, b]$ *et* $(x - h) \in [a, b]$, *on a*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4}$$

Exercice 2

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2}$$

Q. 3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x + ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

Q. 4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x - ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0,N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ de pas h. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$.

Q. 1 ***a.*** *Déterminer en fonction de h et $\boldsymbol{F}$, un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N]\!].$$

b. *Ecrire une fonction algorithmique DerOrder1 permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de h, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédent.*

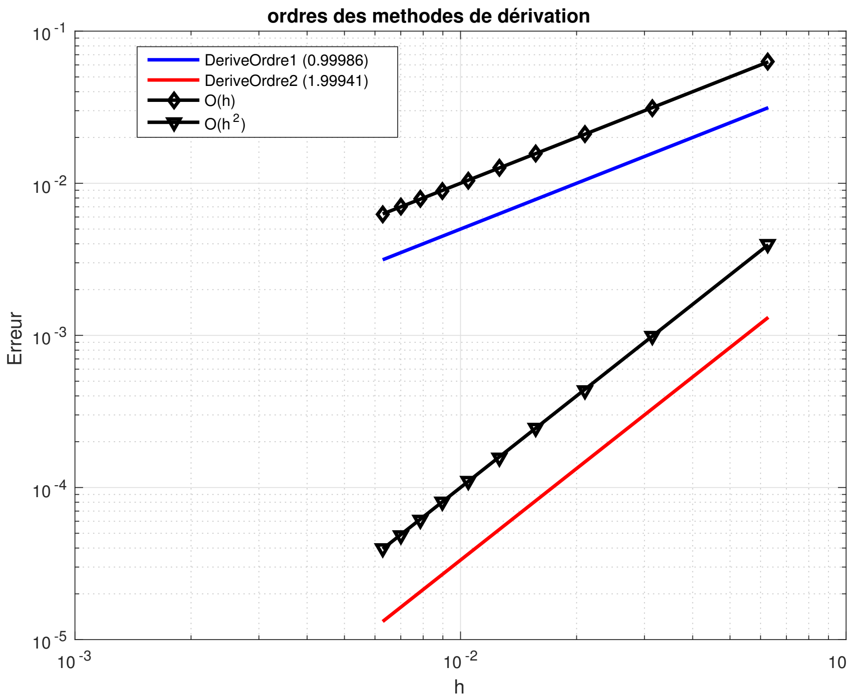
Q. 2 ***a.*** *Connaissant uniquement le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![0,N]\!]$$

b. *Ecrire une fonction algorithmique DerOrder2 permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de h, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédent.*

Exercice 4

Voici une figure permettant de mettre en en évidence de l'ordre des méthodes utilisées dans les fonctions DerOrder1 et DerOrder2 de l'exercice précédent:



Q. 1 ***a.*** *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à cette représentation graphique.*

b. *A l'aide de ces données, calculer les pentes des droites bleue et rouge.*

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont loglog, semilogx et semilogy. Elles s'utilisent globalement comme la fonction plot.

Q. 2 *Ajouter au programme précédent le code permettant de représenter la figure.*