Travaux dirigés - E.D.O.

1 Problèmes de Cauchy

Exercice 1

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a)\ \begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t),\ t \in]0, 2\pi] \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} LCv''(t) + \left(\dfrac{L}{R_2} + R_1 C\right) v'(t) + \left(\dfrac{R_1}{R_2} + 1\right) v(t) = e,\ t \in]0, 100] \\ v(0) = 0,\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t),\ t \in]0, 10] \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0,\ t \in]0, T] \\ y(0) = u_0,\ y^{(1)}(0) = v_0,\ y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$

Exercice 2

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} X'(t) &=& 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ Y'(t) &=& -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases}$$

avec C.I. $X(0) = X_0$ et $Y(0) = Y_0$.

Exercice 3

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I. $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$.

Exercice 4

On considère deux blocs de masses respectives m_1 et m_2 liés l'un à l'autre par un ressort de constante de raideur k_2. Le bloc de masse m_1 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_1 et, à l'autre extrémité du système, le bloc de masse m_2 est lié à un point d'ancrage fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k_3.
La masse des ressorts est négligeable et on suppose que l'amplitude de déplacement des deux blocs est toujours suffisamment faible pour que la loi de Hooke soit vérifiée. Finalement, tous les frottements sont considérés comme négligeables.
Le système d'équations différentielles gouvernant l'évolution de la position des deux blocs dans le temps est donnée par

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}(t) = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}(t) = k_2 x_1(t) - (k_2 + k_3)x_2(t). \tag{2}$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les déplacements respectifs des blocs m_1 et m_2 par rapport à leur position d'équilibre au cours du temps (voir figure 2).

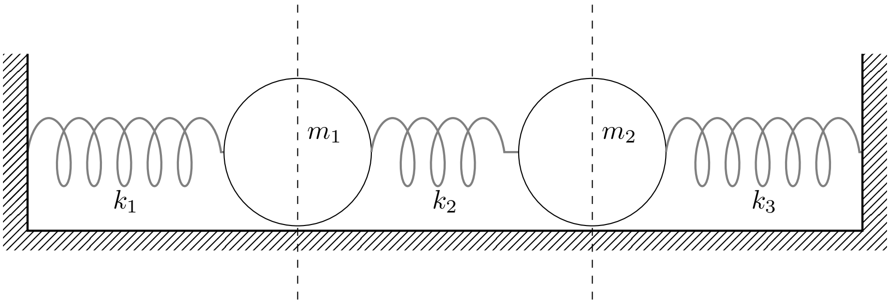

Figure 1: Positions d'équilibre

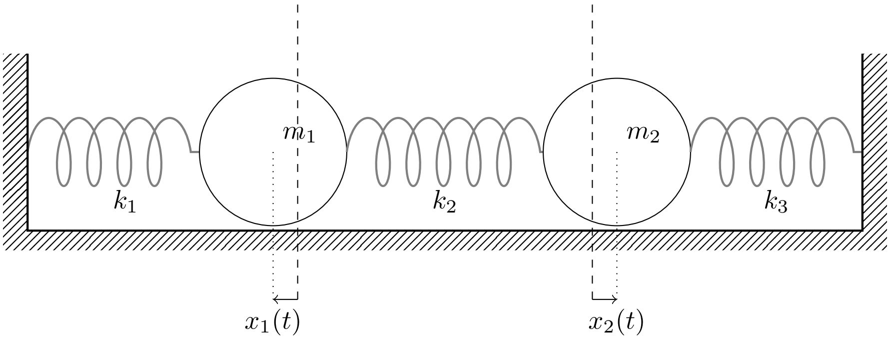

Figure 2: En mouvement

A l'instant initial $t = 0$, on a $x_1(0) = u_1$, $\frac{dx_1}{dt}(0) = w_1$, $x_2(0) = u_2$, $\frac{dx_2}{dt}(0) = w_2$ où u_1, u_2, w_1, et w_2 sont des réels donnés.

Q. 1 *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy vectoriel associé à ce problème.*

2 Différences finies

Exercice 5

On veut résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P})$ suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t) + 1, \ \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.
On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{(n+1)} &= y^{(n)} + hf(t^n, y^{(n)}), \\ y^{(0)} & \text{donné.} \end{cases}$$

Q. 1 *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{(n)}$ et la fonction y, ...*

Q. 2 *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas (constant) de discrétisation.*

Q. 3 *Ecrire une fonction* REDEP *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{(n)})$ calculés par le schéma d'Euler progressif.*

Q. 4 *Ecrire un algorithme complet de résolution de $(\mathcal{P})$ par le schéma d'Euler progressif.*

3 Méthodes à un pas

Exercice 6

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 2 :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 2 associé au tableau de Butcher (3).*

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient la **méthode de Heun** et pour $\alpha = 1$, on obtient la **méthode d'Euler modifiée** ou la **méthode du point milieu**:

Q. 2 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedHeun *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun.*

Q. 3 (Algorithmique) *En utilisant (par exemple) l'EDO suivante:*

$$y'(t) = cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \ avec \ y(0) = 0 \quad (sol.ex.y(t) = \sin(t) + t)$$

écrire un programme permettant de vérifier numériquement l'ordre du schéma de Heun et le comparer à celui de la méthode d'Euler progressive déjà programmée.

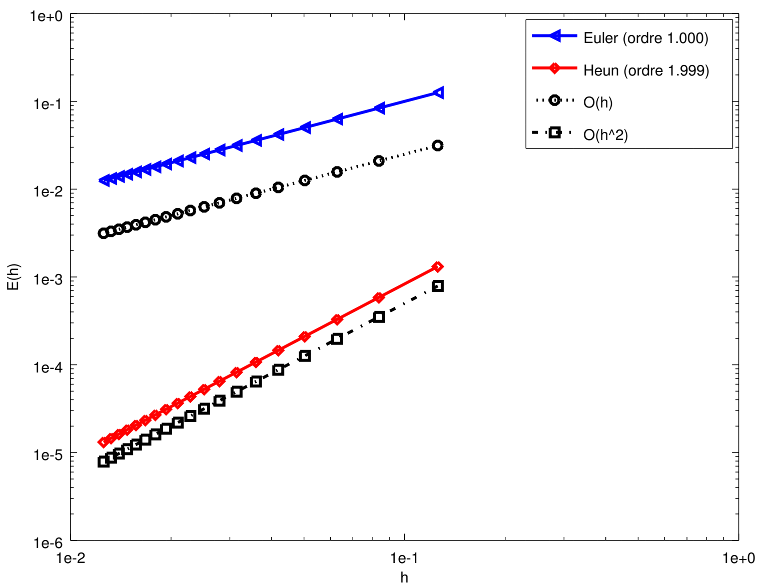

Figure 3: Méthode de Heun : vérification numérique de l'ordre

Exercice 7

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 3 :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3).*

Q. 2 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy* **vectoriel** *par le schéma d'ordre* 3 *précédent.*

Exercice 8

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{k}_1^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_2^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_3^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_4^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{k}_3^{[n]}) \\ \hline \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_2^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_3^{[n]} + \boldsymbol{k}_4^{[n]}). \end{array}$$

Q. 1 *Ecrire une fonction algorithmique* REDRK4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.*

Q. 2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.*

4 Méthodes à pas multiples

Dans ces exercices, il est possible d'utiliser l'une des méthodes à un pas précédentes pour la partie initialisation...

Exercice 9

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right). \tag{1}$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDAB4VEC *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par cette méthode.*

Exercice 10 *(type sujet examen)*

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 3 :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3).*

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{4}(\boldsymbol{k}_1 + 3\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{3}\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{k}_2), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{4}$$

Q. 2 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (4).

La **méthode de Nyström** explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n-1]} + \frac{h}{3}\left(7\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - 2\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{5}$$

Q. 3 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (5). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».*

Q. 4 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDNI3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (5).

Application: Considérons le système mécanique de trois masses m_1, m_2 et m_3 attachées entre elles horizontalement par des ressorts de raideur k_1, k_2, k_3 et k_4. Les positions au cours du temps des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont données par les fonctions x_1, x_2 et x_3.

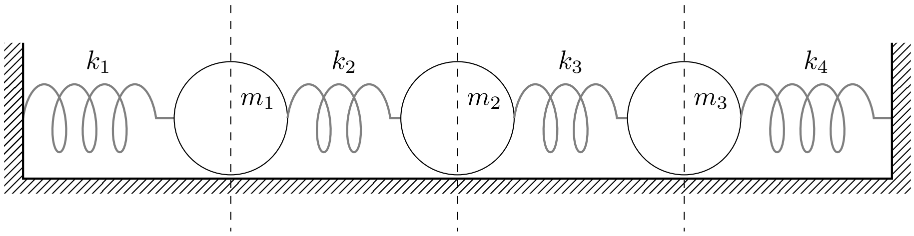

Figure 4: Positions d'équilibre

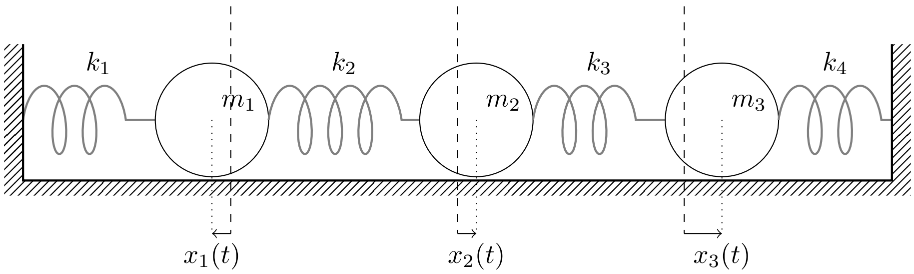

Figure 5: En mouvement

Le système d'équations de mouvement du système s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) & = 0 \quad \text{(6a)} \\ m_2\ddot{x}_2(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2x_1(t) - k_3x_3(t) & = 0 \quad \text{(6b)} \\ m_3\ddot{x}_3(t) + (k_3 + k_4)x_3(t) - k_3x_2(t) & = 0 \quad \text{(6c)} \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$, $x_3(0) = 1/3$ et $\dot{x}_2(0) = -1/2$. Le temps final T sera égal à 20.

Q. 5 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.*

Q. 6 (Algorithmique) *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (6a)-(6b)-(6c) *avec les données initiales spécifiées. On prendra $k_1 = k_4 = 1$ et $k_2 = k_3 = 2$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1, x_2 et x_3. On utilisera pour celà la fonction* PLOT(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).*

5 Méthodes de prédiction/correction

Dans ces exercices, il est possible d'utiliser l'une des méthodes à un pas précédentes pour la partie initialisation...

Exercice 11

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right)$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDPreCor4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction* $\boldsymbol{f}$ *dans la boucle principale.*

Exercice 12 *(type sujet examen)*

Q. 1 **a.** *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

b. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

c. *Que cherche-t'on?*

On souhaite résoudre numériquement l' E.D.O. suivante

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) + sin(t)y(t) &= \cos(t),\ t \in]0, 2\pi], & (1)\\ y(0) &= -1, & (2)\\ y^{(1)}(0) &= 1, & (3)\end{aligned}$$

Ici, $y^{(n)}(t)$ note la dérivée n-ième de la fonction y en t.

Q. 2 **a.** *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

b. *Ecrire, de manière détaillée, le problème de Cauchy associé à l'E.D.O. précédente.*

Q. 3 *Soit* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application. On suppose* $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ *(3 fois continuement dérivable sur* $\mathbb{R}$*).*

a. *Rappeler les développements de Taylor de* $y(t+h)$ *et* $y(t-h)$*.*

b. *En déduire trois approximations de* $y'(t)$*, deux à l'ordre 1 et une à l'ordre 2.*

c. *Déduire d'une des trois approximations précédentes, un schéma numérique explicite pour l'approximation d'un problème de Cauchy scalaire.*

Le schéma de Ralston d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{4}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{3h}{4}\boldsymbol{f}\left(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right). \tag{4}$$

Q. 4 **a.** *Expliquer en détail comment utiliser ce schéma pour résoudre l'E.D.O.* (1)-(3) *en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, ...*

b. *Donner une relation entre* $\boldsymbol{y}^{[n]}$ *et la fonction* y *solution du problème* (1)-(3)

Q. 5 (algorithmique) *Soit* a, b*,* $a < b$ *deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant les points* t^n*,* $t^0 = a < t^1 < \ldots < t^N = b$*, points de la discrétisation régulière de l'intervalle* $[a; b]$ *avec* N *pas (constant).*

Q. 6 (algorithmique) *Ecrire une fonction* REDRalstonVec *retournant l'ensemble des couples* $(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$ *calculés par le schéma* (4) *(Ralston ordre 2) pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel).*

Q. 7 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (1)-(3) *par le schéma* (4) *(Ralston ordre* 2*) en utilisant au maximum les fonctions déjà écrites.*

On rappelle le schéma d'Adams-Moulton implicite d'ordre 2 pour la résolution d'un problème de Cauchy (vectoriel) :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right). \tag{5}$$

Q. 8 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant les schémas* (4) *(Ralston ordre* 2*) et d'Adams-Moulton implicite d'ordre* 2*.*

Q. 9 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PreCorVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par la méthode de prédiction-correction précédente.*

Q. 10 (algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution de l'E.D.O.* (1)-(3) *par la méthode de prédiction-correction précédente.*