EXAMEN DU 29 MARS 2022

durée : 2h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points) (10.25 points)

[0.25 PTS] **Q. 1** **(a)**. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

[0.5 PTS] **(b)**. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

[0.25 PTS] **(c)**. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

[0.25 PTS] **(d)**. *Que cherche-t'on?* ☐

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$

[0.5 PTS] *($a < b$) en $n+1$ points.* ☐

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} & \frac{5}{18} \end{array} \tag{3}$$

Q. 3 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (3). On admettra que*

[1.5 PTS] *ce schéma est d'ordre* 3. ☐

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{18}h(5\boldsymbol{k}_1 + 16\boldsymbol{k}_2 - 3\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{3}{4}h, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{3}{4}h\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{3}h(7\boldsymbol{k}_1 - 4\boldsymbol{k}_2)), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{4}$$

Q. 4 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy*

[1.5 PTS] *vectoriel par le schéma* (4). ☐

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\left(\frac{23}{12}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \frac{4}{3}\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{5}$$

Q. 5 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (5). *Un soin particulier*

[1.5 PTS] *sera apporté à l'«initialisation».* ☐

[1.5 pts] **Q. 6** (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedPM3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (5). ☐

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)) + x_2(t) &= \cos(t) \quad (6a)\\ \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_3(t) - \dot{x}_1(t)) + x_3(t) &= \sin(t) \quad (6b)\\ \ddot{x}_3(t) - \nu_3(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) &= 0 \quad (6c)\end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$, $x_3(0) = 3$, $\dot{x}_3(0) = 1/3$. Le temps final T sera égal à 10.

[1.5 pts] **Q. 7** *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* ☐

[1 pts] **Q. 8** (Algorithmique) *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (6a)-(6b)-(6c) *avec les données initiales spécifiées. On prendra $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1/2$ et $\nu_3 = 1/3$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1, x_2 et x_3. On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐

Exercice 2 : E.D.P. (10 points) (11.5 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u'(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, & (1)\\ u(a) &= \alpha, & (2)\\ u'(b) + \nu u(b) &= \beta. & (3)\end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et c est une fonction strictement positive.

[0.25 pts] **Q. 1** **(a).** *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

[0.5 pts] **(b).** *Quelles sont les données du problème* (1)-(3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

[0.25 pts] **(c).** *Quelles sont les inconnues du problème* (1)-(3)*? (préciser le type)*

[0.25 pts] **(d).** *Quelles sont les conditions initiales?*

[0.25 pts] **(e).** *Quelles sont les conditions aux limites?* ☐

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1) à (3) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= f_i, & (4)\\ (3 + 2\nu h)u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} &= 2h\beta. & (5)\end{aligned}$$

[1.5 pts] **Q. 2** **(a).** *Expliquer en détail comment le schéma* (4) *a été obtenu à partir de* (1) *et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c_i et h?*

[1.0 pts] **(b).** *Expliquer en détail comment le schéma* (5) *a été obtenu à partir de* (3).

[0.25 pts] **(c).** *Donner une discrétisation détaillée du problème* (1) *à* (3) *en utilisant les schémas* (4) *et* (5).

[0.25 pts] **(d).** *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.* ☐

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 3 *Montrer, de manière détaillée, que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \qquad (6)$$

[2.0 pts] *en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).* ☐

Q. 4 *Ecrire la fonction* CreMat *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & p_{d-2} & q_{d-2} & r_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

[1.0 pts] *où* p_i, q_i, r_i, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 *et* f_3 *sont des réels donnés.* ☐

Q. 5 *Ecrire la fonction algorithmique* resEDP *permettant de résoudre le problème* (1) *à* (3) *en utilisant les schémas* (4) *et* (5)*. Cette fonction devra retourner la discrétisation* $(x_i)_{i=0}^N$ *de l'intervalle* $[a, b]$ *avec* N *pas de discrétisation et*
[1.5 pts] *l'ensemble des* $(u_i)_{i=0}^N$. ☐

Q. 6 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1) *à* (3) *utilisant la fonction* resEDP *dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte* $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^2)$*. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour celà, on utilisera la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$
[1 pts] *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *(function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐

Q. 7 *Proposer un algorithme complet permettant de vérifier graphiquement l'ordre du schéma. Pour celà, on utilisera la fonction* Loglog(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *en utilisant une échelle logarithmique suivant l'axe des abscisses et suivant l'axe des ordonnées (function similaire à la*
[1.5 pts] *fonction* `loglog` *de Matlab).* ☐