Energétique 1ère année **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2019-2020**

Examen du 4 février 2020

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

Exercice 1 : 3 points

Soient t un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.
Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$x_i = \prod_{j=1}^{p} \left((v_i + \cos(jt)) \sum_{k=1}^{m} (v_k + (t - j/\pi)^2) \right), \ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

Q. 1 1. *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer* $\boldsymbol{x}$*? Préciser les types et les dimensions.*

2. *Ecrire la fonction* ***SP*** *permettant de calculer* $\boldsymbol{x}$*. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

3. *Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.* □

Exercice 2 : 3 points

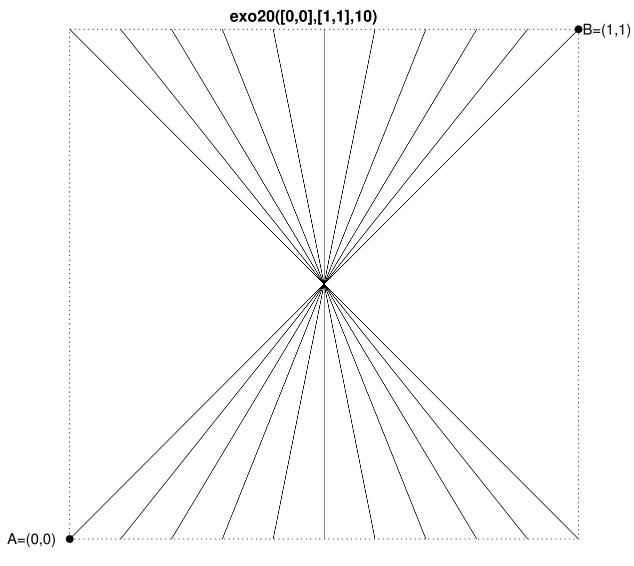
Q. 1 *Ecrire une fonction* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ $(a < b)$ *en* $n + 1$ *points.*

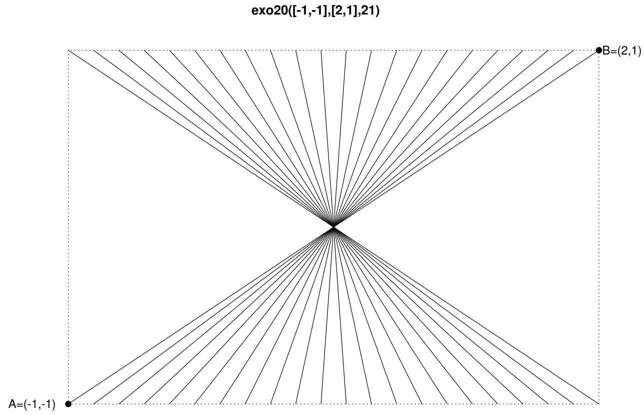
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A, (x_B, y_A), B et (x_A, y_B).
On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B, on dispose de la commande `plot(`$[x_A, x_B]$`,`$[y_A, y_B]$`)`.

Q. 2 *Ecrire une fonction* `exo20` *de paramètres* A, B *et* n *permettant de*

- *représenter les bords du rectangle,*
- *relier les points des bords supérieurs et inférieurs, dont les abscices sont une discrétisation régulière en* $n + 1$ *points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.*

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :





Exercice 3 : 14 points

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
Le tableau de Butcher suivant défini un schéma d'ordre 3 : Un des schéma de **Runge-Kutta d'ordre 3** est donné par le tableau de Butcher suivant:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 3/4 & 1/4 \end{array} \tag{3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma d'ordre 3 associé au tableau de Butcher (3).* ☐

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{8}(2\boldsymbol{k}_1 + 3\boldsymbol{k}_2 + 3\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{k}_2), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{4}$$

Q. 2 1. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

2. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*
3. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*
4. *Que cherche-t'on?* ☐

Q. 3 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (4). □

La **méthode de Nyström** explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n-1]} + \frac{h}{3}\left(7\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - 2\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{5}$$

Q. 4 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (5). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* □

Q. 5 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* RedNI3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (5). □

La **méthode de Adams-Moulton d'ordre 3** implicite est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + 8\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]})\right) \tag{6}$$

Q. 6 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type Prédicteur/Correcteur utilisant les schémas* (5) *et* (6).

Q. 7 (algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* PC3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant les schémas* (5) *et* (6). *Cette fonction devra être optimisée en calcul de* $\boldsymbol{f}^{[n]}$ *et en place mémoire.*

Application : On souhaite résoudre numériquement le problème de l'oscillateur libre de *Van der Pool* (1924)

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) - \epsilon\omega_0(1 - x^2(t))\frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \tag{7}$$

avec $x(0) = 1$ et $\frac{dx}{dt}(0) = -1$. Ici $x(t)$ représente l'amplitude des oscillations. ϵ, ω_0 et T sont des constantes positives.

Q. 8 *Ecrire ce système différentiel sous la forme d'un problème de Cauchy.* ⊡

Q. 9 (algorithmique) *Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement le problème* (7) *avec conditions initiales.*