Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Méthodes Numériques II

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année (S6)

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

20/02/2024

Plan du cours

Plan

Soit $\boldsymbol{y}$ la solution d'un problème de Cauchy (vectoriel) et $(t^n)_{n=0}^N$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[t^0, t^0 + T]$.

♥ Definition 6.1: Méthodes à un pas

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale:

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1}$$

Le schéma (1) converge sur l'intervalle $[t^0, t^0 + T]$ si, pour la suite des $\boldsymbol{y}^{[n]}$ calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas h diminue:

$$\lim_{h=\frac{T}{N}\to 0} \max_{n\in\{0,\dots,N\}} \left\| \boldsymbol{y}^{[n]} - \boldsymbol{y}(t^n) \right\|_\infty = 0$$

Pour la méthode d'Euler progressif $\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$.

Definition 6.2: Consistance

Le schéma de calcul (1) est consistant avec le problème de Cauchy (3.9)-(3.10) si

$$\lim_{h=\frac{T}{N}\to 0} \max_n \left\| \frac{\boldsymbol{y}(t^{n+1}) - \boldsymbol{y}(t^n)}{h} - \boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}(t^n), h) \right\|_\infty = 0$$

Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

Théorème 7

Le schéma (1) est consistant avec le problème de Cauchy (3.9)-(3.10) si $\Phi(t, \boldsymbol{y}, 0) = f(t, \boldsymbol{y})$.

Definition 7.1: Stabilité

La méthode est stable si une petite perturbation sur $\boldsymbol{y}^{[0]}$ ou $\boldsymbol{\Phi}$ n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas h.

Théorème 8

Si $\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h)$ vérifie la condition de Lipschitz en $\boldsymbol{y}$ alors la méthode est stable.

Théorème 9

Si la méthode est **stable et consistante**, alors elle **converge** pour n'importe quelle valeur initiale.

Definition 9.1: Ordre d'un schéma

Le schéma (1) est d'ordre p si la solution $\boldsymbol{y}$ du problème de Cauchy (3.9)-(3.10) vérifie

$$\max_n \left\| \frac{\boldsymbol{y}(t^{n+1}) - \boldsymbol{y}(t^n)}{h} - \boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}(t^n), h) \right\|_\infty = \mathcal{O}(h^p)$$

Lemme 9.2

Soient $\boldsymbol{y}$ la solution du problème de Cauchy (3.9)-(3.10). et $(\boldsymbol{y}^{[n]})_{n\in[\![0,N]\!]}$ donnés par un schéma à un pas (1) d'ordre p avec $\boldsymbol{y}^{[0]} = \boldsymbol{y}(t^0)$. On a alors

$$\max_{n\in[\![0,N]\!]} \left\| \boldsymbol{y}(t^n) - \boldsymbol{y}^{[n]} \right\|_\infty = \mathcal{O}(h^p) \tag{2}$$

Proposition

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (sol.ex.y(t) = \sin(t) + t)$$

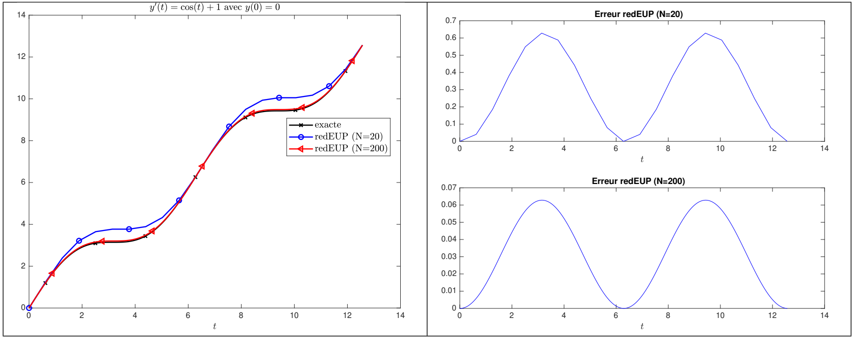


Figure: Méthode d'Euler progressive : vérification numérique de l'ordre

☞ Autre courbe pertinente?

Proposition

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (sol.ex. y(t) = \sin(t) + t)$$

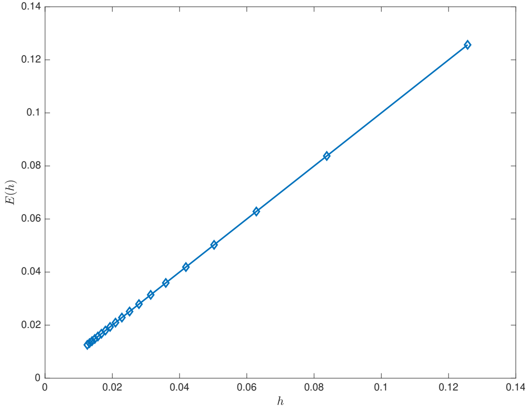


Figure: Méthode d'Euler progressive : vérification numérique de l'ordre

Méthodes de Runge-Kutta

(a) *Carle Runge* 1856-1927, mathématicien et physicien allemand

(b) *Martin Wilhelm Kutta* 1867-1944, Mathématicien allemand

(c) *John C. Butcher* 1933, Mathématicien appliqué néozélandais

L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t))$ sur $[t^n, t^{n+1}]$ et de calculer:

$$\boldsymbol{y}(t^{n+1}) = \boldsymbol{y}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+\mathbf{1}}} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t))dt,$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à q points intermédiaires pour évaluer l'intégrale.

Ce sont des méthodes à un pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

et

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{3}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}q, q(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$

Proposition 9.3: (admis)

1. Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si $\boldsymbol{f}$ est contractante en $\boldsymbol{y}$.
2. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij}.$$

3. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si

$$\sum_{i=1}^{q} c_i = 1.$$

4. Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si

$$\sum_{i=1}^{q} c_i a_i = 1/2.$$

5. Une méthode de Runge-Kutta est explicite si la matrice $\mathbb{B}$ est triangulaire inférieure à diagonale nulle :

$$\forall (i,j) \in [\![1, q]\!],\ j \geqslant i, \quad b_{ij} = 0.$$

Runge-Kutta d'ordre 2

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\
\hline
 & 1-\alpha & \alpha
\end{array}
\tag{4}
$$

$$
\mathbf{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = (1-\alpha)\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) + \alpha \boldsymbol{f}(t + \frac{h}{2\alpha}, \boldsymbol{y} + \frac{h}{2\alpha}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}))
$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$, **méthode de Heun** :

$$
\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).
$$

- $\alpha = 1$, **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu**:

$$
\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).
$$

Exercice 1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

Q.1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDHeunVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus* $2N$ *évaluation de* $\boldsymbol{f}$.

Q.2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.*

Application

$$y'(t) = cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (sol.ex.y(t) = \sin(t) + t)$$

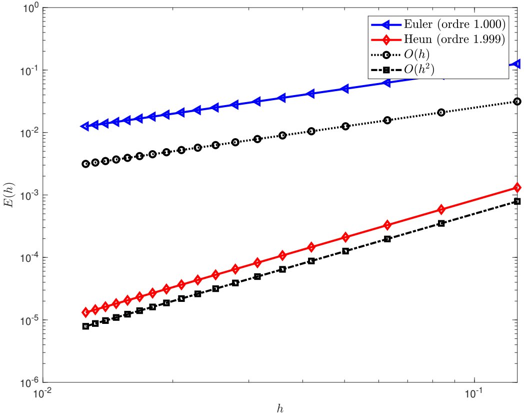


Figure: Méthode de Heun : vérification numérique de l'ordre

Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Buchler suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \tag{5}$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{k}_1^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_2^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_3^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2^{[n]}) \\ \boldsymbol{k}_4^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{k}_3^{[n]}) \\ \hline \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_2^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_3^{[n]} + \boldsymbol{k}_4^{[n]}). \end{array} \tag{6}$$

Exercice 2

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$
\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{k}_1^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) \\
\boldsymbol{k}_2^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1^{[n]}) \\
\boldsymbol{k}_3^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2^{[n]}) \\
\boldsymbol{k}_4^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{k}_3^{[n]}) \\
\hline
\boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_2^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_3^{[n]} + \boldsymbol{k}_4^{[n]}).
\end{array}
$$

Q.1 *Ecrire une fonction algorithmique* REDRK4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.*

Q.2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.*

$$y'(t) = cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (sol.ex.y(t) = \sin(t) + t)$$

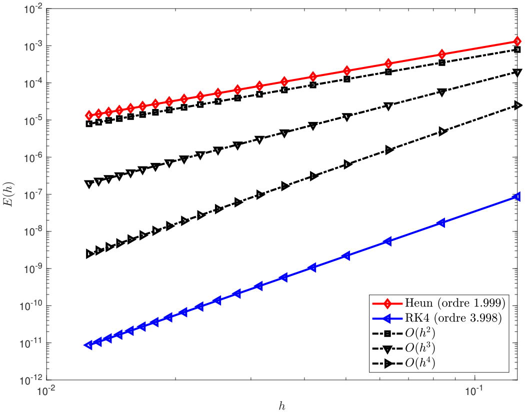


Figure: Méthode RK4 : vérification numérique de l'ordre

mais en prenant des h de plus en plus petits ...

$$y'(t) = cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (sol.ex.y(t) = \sin(t) + t)$$

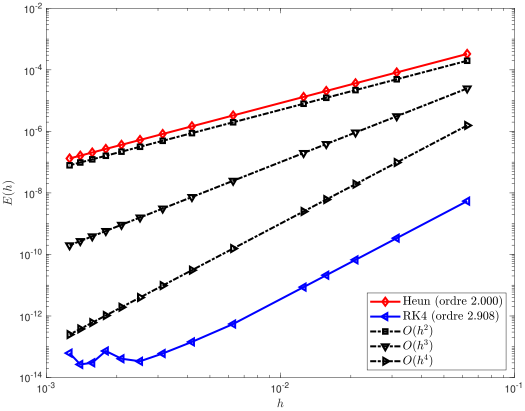


Figure: Méthode RK4 progressive : vérification numérique de l'ordre

Plan

Exemple d'une méthode à deux pas :

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n-1]} + 2h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}). \tag{7}$$

Cette méthode est d'ordre 2.

Definition 10.1: Méthodes à pas multiples

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i \boldsymbol{f}(t^{n+i}, \boldsymbol{y}^{[n+i]}) \tag{8}$$

où k est le nombre de pas, $\alpha_k \neq 0$ et $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$.

Si $\beta_k = 0$ le schéma est **explicite**, sinon il est **implicite**.

Definition 10.2: ordre

Soit $\boldsymbol{y}$ la solution d'un problème de Cauchy (3.9)-(3.10) et $\boldsymbol{y}^{[n+k]}$ le terme obtenu par le schéma (8) en prenant $\boldsymbol{y}^{[n+i]} = \boldsymbol{y}(t^{n+i})$, $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$. Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \left\| \boldsymbol{y}(t^{n+k}) - \boldsymbol{y}^{[n+k]} \right\|_{\infty}.$$

Le schéma (8) est alors d'**ordre** p si

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Théorème 11: ordre schémas à pas multiples (admis)

Un schéma à pas multiples de type (8) est d'ordre p si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i i^q &= q \sum_{i=0}^{k} \beta_i i^{q-1}, \quad \forall q \in [\![1, p]\!]. \end{aligned}$$

Théorème 12: stabilité schémas à pas multiples (admis)

Soit une méthode à pas multiples donnée par (8). On note P le polynôme défini par

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i.$$

La méthode à pas multiples est **stable**, si

1. toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1,
2. une racine de module égal à 1 est une racine simple de P.

Théorème 13: convergence (admis)

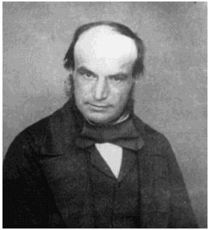
On suppose que les k valeurs initiales vérifient,

$$\left\| \boldsymbol{y}(t^i) - \boldsymbol{y}^{[i]} \right\| \leqslant C_0 h^p, \ \forall i \in [\![0, k-1]\!].$$

Si le schéma (8) est **stable et d'ordre** p, alors il est **convergent** d'ordre p :

$$\left\| \boldsymbol{y}(t^n) - \boldsymbol{y}^{[n]} \right\| \leqslant C h^p, \ \forall n \in [\![0, N]\!].$$

Exemples de schémas à pas multiples



John Couch Adams 1819-1892, mathématicien et astronome britannique

Francis Bashforth 1819-1912, mathématicien appliqué britannique

(a) *Forest Ray Moulton* 1872-1952, mathématicien et astronome américain

- Méthodes **explicites** d'Adams-Bashforth
- Méthodes **implicites** d'Adams-Moulton

Méthodes explicites d'Adams-Bashforth

On note en abrégé $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 2 pas :
$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(3\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right).$$
- Ordre 3 à 3 pas :
$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(23\boldsymbol{f}^{[n]} - 16\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 5\boldsymbol{f}^{[n-2]}\right).$$
- Ordre 4 à 4 pas :
$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right).$$

Exercice 3

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right). \tag{9}$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q.1 *Ecrire la fonction algorithmique REDAB4Vec permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode.*

☞ Initialisation d'un schéma à pas multiples avec un schéma à un pas du **même ordre au moins**

Méthodes implicites d'Adams-Moulton

On note en abrégé $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 1 pas :
$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\left(\boldsymbol{f}^{[n+1]} + \boldsymbol{f}^{[n]}\right).$$
- Ordre 3 à 2 pas :
$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 8\boldsymbol{f}^{[n]} - \boldsymbol{f}^{[n-1]}\right).$$
- Ordre 4 à 3 pas :
$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right).$$

Plan

Méthodes de prédiction-correction

Une méthode de prédiction-correction procède en deux étapes à chacune des itérations :

- **Prédiction** : on calcule une approximation de $\boldsymbol{y}(t_{n+1})$ notée $\widehat{\boldsymbol{y}^{[n+1]}}$ à l'aide du **schéma explicite**
- **Correction** : on utilise le schéma implicite dans lequel les fonctions $\boldsymbol{f}$ utilisant $\boldsymbol{y}^{[n+1]}$ sont remplacées par les fonctions $\boldsymbol{f}$ utilisant $\widehat{\boldsymbol{y}^{[n+1]}}$.

Exemple

Méthode d'Euler **explicite** pour **prédicteur** et méthode **implicite** des trapèzes comme **correcteur**.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Euler explicite :} & \boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) \\
\textbf{Trapèze implicite :} & \boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, {\color{blue}\boldsymbol{y}^{[n+1]}}))
\end{array}
$$

On obtient :

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
\widehat{\boldsymbol{y}^{[n+1]}} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) & \textbf{Prédiction} \\
\boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \boldsymbol{f}(t^{n+1}, {\color{blue}\widehat{\boldsymbol{y}^{[n+1]}}})) & \textbf{Correction}
\end{array}
\right.
$$

Exercice 4

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right)$$

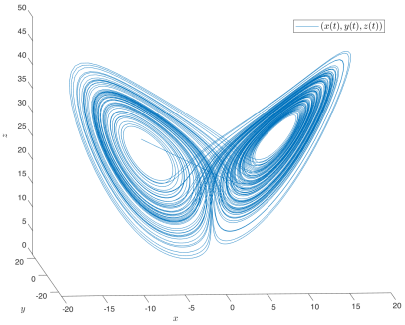
avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

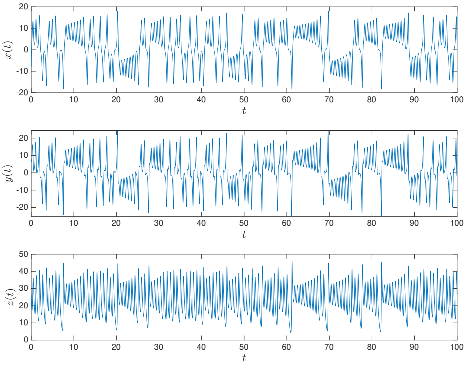
Q.1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDPC4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction* $\boldsymbol{f}$ *dans la boucle principale.*

Plan

$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)z(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

$\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ - $x(0) = -8$, $y(0) = 8$, $z(0) = \rho - 1$.





☞ Comment reproduire ces graphiques avec Matlab/Octave?

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :
Trouver $\boldsymbol{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ solution de

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}'(t) & = & \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \boldsymbol{y}(t^0) & = & \boldsymbol{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \end{array}$$

où $t^0 = 0,\ T = 100$ et

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{f} & : & [0, 100] \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (t, \square) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(t, \square) = \begin{pmatrix} -\sigma \square_1 + \sigma \square_2 \\ -\square_1 \square_3 + \rho \square_1 - \square_2 \\ \square_1 \square_2 - \beta \square_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

ou encore ...

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :
Trouver $\boldsymbol{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ solution de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

où $t^0 = 0,\ T = 100$ et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} \quad : \quad [0, 100] \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \boldsymbol{z}) &\longmapsto \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} -\sigma z_1 + \sigma z_2 \\ -z_1 z_3 + \rho z_1 - z_2 \\ z_1 z_2 - \beta z_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} -\sigma z_1 + \sigma z_2 \\ -z_1 z_3 + \rho z_1 - z_2 \\ z_1 z_2 - \beta z_3 \end{pmatrix}$$

Listing: fonction de Cauchy : fichier fLorentz.m

```
function w=fLorentz(t,z,beta,rho,sigma)
  % Function de Cauchy associee au modele de Lorentz
  %   beta, rho et sigma parametres physiques
  w=[-sigma*z(1)+sigma*z(2); ...
      -z(1)*z(3)+rho*z(1)-z(2); z(1)*z(2)-beta*z(3)];
end
```

Listing: Résolution du modèle de Lorentz : script prgLorentz.m

```
sigma=10;rho=28;beta=8/3;
fCauchy=@(t,z) fLorentz(t,z,beta,rho,sigma);

y0=[-8;8;rho-1];
[t,Y]=redRK4Vec(fCauchy,0,100,y0,10000);

opts={'interpreter','latex','Fontsize',12};
figure(1)
plot3(Y(1,:),Y(2,:),Y(3,:))
legend('$(x(t),y(t),z(t))$','Location','northeast',opts{:})
xlabel('$x$',opts{:})
ylabel('$y$',opts{:})
zlabel('$z$',opts{:})
view(-5,10)

figure(2)
subplot(3,1,1)
plot(t,Y(1,:));
xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$x(t)$',opts{:})
subplot(3,1,2)
plot(t,Y(2,:));
xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$y(t)$',opts{:})
subplot(3,1,3)
plot(t,Y(3,:));
xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$z(t)$',opts{:})
```