Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Méthodes Numériques II

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année (S6)

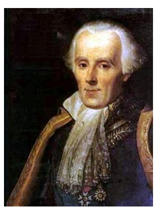
François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

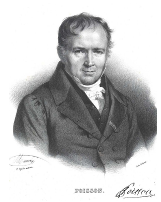
29/02/2024

Plan du cours

Equation de Laplace et équation de Poisson



Pierre-Simon Laplace 1749-1827, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français



Siméon Denis Poisson 1781-1840, mathématicien, géomètre et physicien français

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

où Δ est l'opérateur laplacien : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
Equation de Laplace si $f = 0$, sinon équation de Poisson.

Conditions aux limites

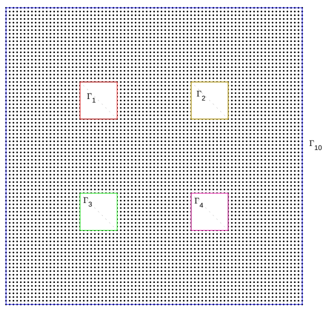
$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de $\partial\Omega$,
$$u = g, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega. \tag{2}$$
- **Neumann** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$,
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{N}} \subset \partial\Omega. \tag{3}$$
où $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad}\, u, \boldsymbol{n} \rangle$ avec $\boldsymbol{n}$ normale exterieure unitaire à Ω
- **Robin** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{R}} \subset \partial\Omega. \tag{4}$$

Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

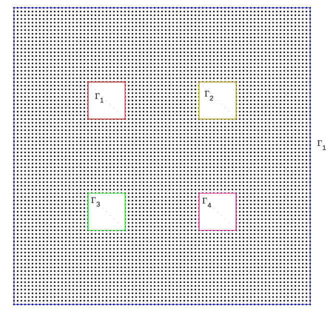
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \ \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \ \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \ \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$

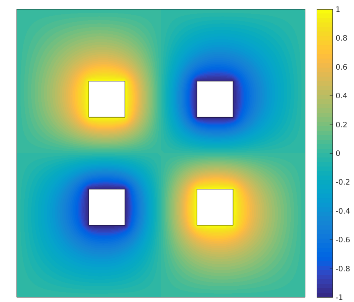


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \ \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \ \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \ \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$

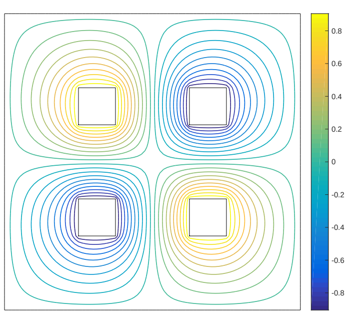


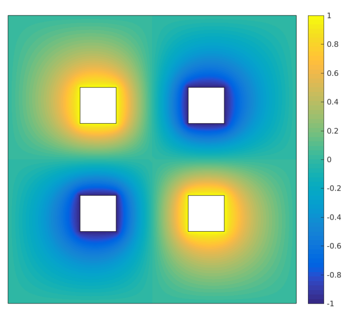


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \ \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \ \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \ \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$

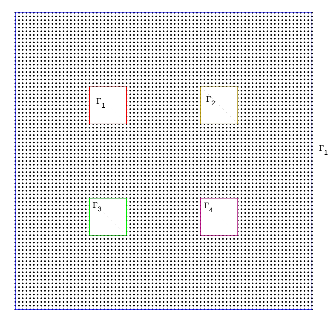




Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

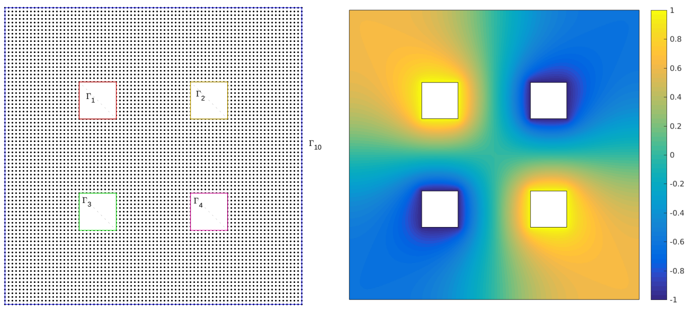
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \ \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \ \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \ \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \ \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$



Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

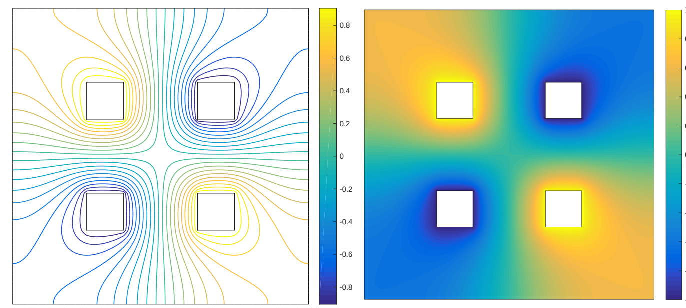
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$



Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$



Problème mal posé

Problème en dimension n

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.
Ce problème est **mal posé** : non unicité de la solution.

$$u \text{ solution } \Rightarrow u + \text{constante solution}$$

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - D\Delta u(t, \mathbf{x}) = \frac{f(t, \mathbf{x})}{\rho c}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \ \forall t \in [0, T] \tag{5}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- D, coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s),
- f, production volumique de chaleur (en W/m^3),
- ρ, masse volumique du matériau (en kg/m^3),
- c, chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg/K$),
- Δu laplacien (en espace) : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$

Problème bien posé ?

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) - D\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{f(t,\boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T] \tag{5}$$

Problème bien posé :

- **condition initiale**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad u(t,\boldsymbol{x}) = g_D(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Neumann** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{N}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Robin** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{R}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) + \alpha u(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

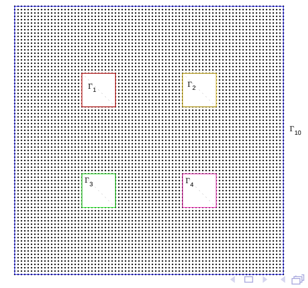
Problème de chaleur en 2D

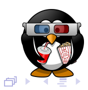
Find $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u &= 0 \ \text{ in } [0,T] \times \Omega, \\ u(0,\boldsymbol{x}) &= 20 \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \ \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= g_1 \ \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= g_2 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$

où Ω (cotés de $20cm$)

- $D = 98.8 \times 10^{-6}$ (aluminium) ou $D = 23.9 \times 10^{-6}$ (plomb),
- $\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $g_1(t,\boldsymbol{x}) = (20 + 40t)$ si $t <= 1$ et $g_1(t,\boldsymbol{x}) = 60$ sinon,
- $\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_4$, $g_2(t,\boldsymbol{x}) = (20 + 80t)$ si $t <= 1$ et $g_2(t,\boldsymbol{x}) = 100$ sinon.





Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) - c^2\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T] \tag{7}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- $c > 0$ vitesse de propagation de l'onde,

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) - c^2\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T]$$

- **conditions initiales**

$$u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \textbf{[position initiale]} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,\boldsymbol{x}) = v_0(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \textbf{[vitesse initiale]} \tag{9}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad u(t,\boldsymbol{x}) = g_D(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Neumann** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{N}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad c^2\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

  - **Robin** :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{R}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad c^2\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) + \alpha u(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

Résolution numérique d'EDP

Méthodes déterministes :

- **méthode des différences finies**
- **méthode des éléments finis**
- **méthode des volumes finis**

Soient $a < b$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.

EDP modèle stationnaire 1D

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

ou

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Chercher u ou $u(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (infinité de points!)

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

$$x_i = a + ih, \quad \forall i \in [\![0, N]\!], \text{ avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-u''(x_i) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{10}$$
$$u(x_0) = \alpha, \tag{11}$$
$$u(x_N) = \beta. \tag{12}$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (13) \\ u(x_0) &= \alpha, && (14) \\ u(x_N) &= \beta. && (15) \end{aligned}$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (16) \\ u_0 &= \alpha, && (17) \\ u_N &= \beta. && (18) \end{aligned}$$

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, && (16) \\ u_0 &= \alpha, && (17) \\ u_N &= \beta. && (18) \end{aligned}$$

système linéaire de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues !

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ & \vdots & & \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = & h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\
u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{array}
\right.
$$

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \beta
\end{pmatrix}
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \qquad (19)
$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

Proposition 3.1: admis

Le schéma aux différences finies (16)-(18) est consistant à l'ordre 2 avec l'EDP (10)-(10) et on a

$$
\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \qquad (20)
$$

Exercice 1: (schéma étudié en cours)

Q.1 *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$
\mathbb{M} =
\begin{pmatrix}
\gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma
\end{pmatrix} \qquad (21)
$$

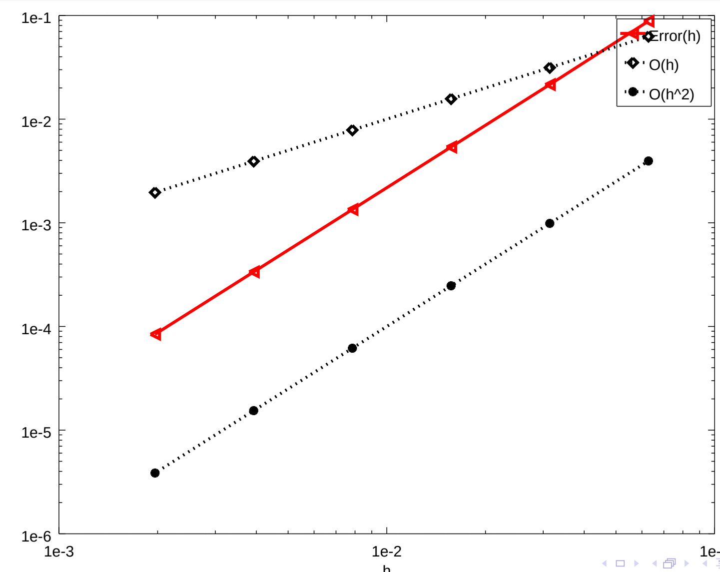
où α, β et γ sont des réels donnés.

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$
\begin{array}{rcl}
-u'' + cu & = & f \ \text{ in }]a,b[, \\
u(a) & = & \alpha, \\
u(b) & = & \beta.
\end{array}
$$

Q.2 *En prenant le jeu de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $f : x \mapsto \cos(x^2)$, écrire une fonction permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*

Q.3 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule (20).*



Listing: fonction Matlab/Octave AssembleMat1D

```
function M=AssembleMat1D(d,alp,bet,gam)
  M=sparse(d,d);
  M(1,1)=gam;M(d,d)=gam;
  for i=2:d-1
    M(i,i)=alp;
    M(i,i-1)=bet;M(i,i+1)=bet;
  end
end
```

Listing: fonction Matlab/Octave solveEDP1

```
function [x,U]=solveEDP1(a,b,c,alp,bet,f,N)
  h=(b-a)/N;
  x=a:h:b;
  A=AssembleMat1D(N+1,2+c*h*h,-1,h*h);
  B=zeros(N+1,1);
  B(1)=alp;B(N+1)=bet;
  for i=2:N
    B(i)=f(x(i));
  end
  B=h*h*B;
  U=A\B;
end
```

Listing: Script Matlab/Octave pour la représentation de l'ordre

```
clear all
close all
% Initialisation des donnees
uex=@(x) sin(x.^2);
c=1;
f=@(x) 4*x^2*sin(x^2) - 2*cos(x^2) + c*sin(x^2);
a=0;b=2*pi;
% Calcul des erreurs
LN=[100,200,400,800,1600,3200];
k=1;
for N=LN
  [x,U]=solveEDP1(a,b,c,uex(a),uex(b),f,N);
  H(k)=(b-a)/N;
  E(k)=max(abs(uex(x)'-U));
  k=k+1;
end
% Representation graphique
loglog(H,E,'r<-','LineWidth',2)
hold on
loglog(H,H,'kd:','LineWidth',2)
loglog(H,H.^2,'k*:','LineWidth',2)
legend('Error(h)','O(h)','O(h^2)')
xlabel('h')
```


EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \quad \text{in }]a, b[, \tag{22}$$
$$u(a) = \alpha, \tag{23}$$
$$u'(b) = \beta. \tag{24}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \quad \text{in }]a, b[, \tag{22}$$
$$u(a) = \alpha, \tag{23}$$
$$u'(b) = \beta. \tag{24}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \quad \text{in }]a, b[, \tag{22}$$

$$u(a) = \alpha, \tag{23}$$

$$u'(b) = \beta. \tag{24}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

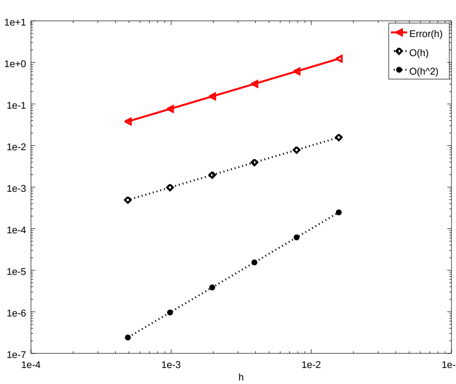
$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta. \tag{25}$$

$$\begin{cases} u_0 & = \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 & = h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\ & \vdots & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N - u_{N-1} & = h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{cases}$$

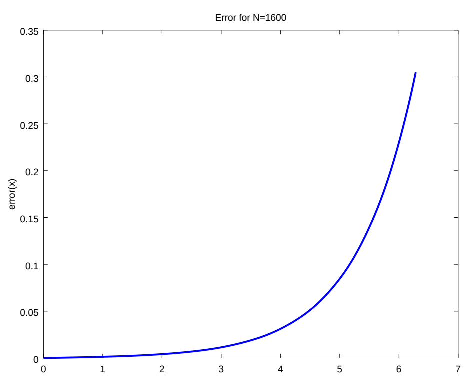
$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ h\beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{26}$$

Mais ...

Schéma d'ordre 1 !!!



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Ecrire un schéma d'ordre 2 pour Neumann

TD

Exercice 2

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q.1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{27}$$

Q.2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{28}$$

Q.3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x + ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

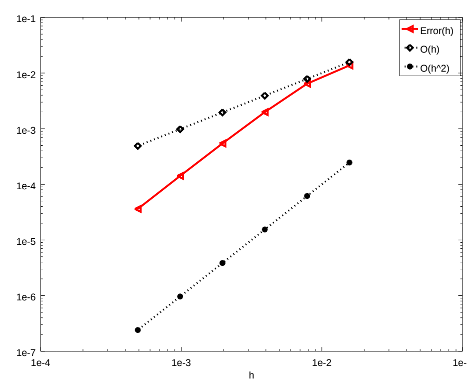
Q.4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x - ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{cases}
u_0 & = \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0\\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 & = f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1\\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 & = f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2\\
 & \vdots & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2}\\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1}\\
3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} & = 2h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{cases}
$$

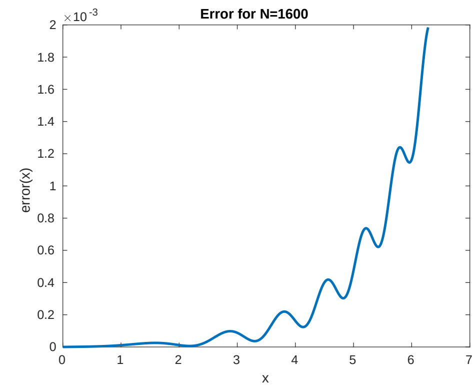
$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 & 0\\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_0\\ u_1\\ u_2\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{N-2}\\ u_{N-1}\\ u_N
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\alpha\\ h^2 f(x_1)\\ h^2 f(x_2)\\ \vdots\\ \vdots\\ h^2 f(x_{N-2})\\ h^2 f(x_{N-1})\\ 2h\beta
\end{pmatrix}
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \qquad (54)
$$

et ...

Schéma d'ordre 2



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Exercice 3

Soit le problème suivant

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + c(x)u(x) &= f(x),\ \forall x \in]a;b[, && (55)\\
u'(a) &= \alpha, && (56)\\
u(b) &= \beta. && (57)
\end{aligned}
$$

où c est une fonction positive.

Q.1

1. *Quelles sont les données du problème (55)-(57)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
2. *Quelles sont les inconnues du problème (55)-(57)? (préciser le type)*
3. *Quelles sont les conditions initiales?*
4. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q.2 *Construire une discrétisation régulière de $[a;b]$ avec N pas de discrétisation en espace.*

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (55) à l'aide du schéma numérique

$$
-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \qquad (58)
$$

Q.3

1. *Expliquer comment le schéma (58) a été obtenu à partir de (55) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*
2. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (55).*
3. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*
4. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q.4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \qquad (59)
$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).

Q.5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (55) à (57) basé sur (59). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*