EXAMEN DU 31 AOÛT 2021

durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Le barème est donné à titre indicatif

A la fin de l'épreuve, vous utiliserez votre smartphone pour *scanner* votre copie et me l'envoyer soit par mail à l'adresse cuvelier@math.univ-paris13.fr soit en message privé sur Discord (comme en TP). Si vous ne pouvez pas, merci de le signaler à Mme Barbaud lors de l'émargement.

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points)

Q. 1 **(a)**. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

(b). *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

(c). *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

(d). *Que cherche-t'on?* ☐

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ *($a < b$) en $n+1$ points.* ☐

Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{4}(\boldsymbol{k}_1^{[n]} + 3\boldsymbol{k}_3^{[n]}) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{3}\boldsymbol{k}_1^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_3^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{k}_2^{[n]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{1}$$

Q. 3 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* REDRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (1).* ☐

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. L'E.D.O.

$$\left\{\begin{array}{lll} y'(t) & = & \sin(t), \ \forall t \in [0, 4\pi], \\ y(0) & = & \beta, \end{array}\right.$$

a pour solution $y(t) = -\cos(t) + 1 + \beta$.

Q. 4 (Algorithmique) *Proposer un algorithme complet permettant de représenter la solution exacte d'une E.D.O. et la solution numérique du problème de Cauchy associé obtenue en utilisant la fonction* REDRK3 *. On représentera graphiquement l'erreur commise en utilisant la fonction* PLOT(X, Y)*. Cette fonction relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐

Q. 5 (Algorithmique) *Proposer un algorithme complet permettant de vérifier graphiquement l'ordre du schéma. Pour celà, on utilisera la fonction* LOGLOG(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y en utilisant une échelle logarithmique suivant l'axe des abscisses et suivant l'axe des ordonnées (function similaire à la fonction* `loglog` *de Matlab).* ☐

Application: Considérons le système mécanique de deux masses m_1 et m_2 attachées entre elles horizontalement par des ressorts de raideur k_1, k_2, et k_3. Les positions au cours du temps des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont données par les fonctions x_1 et x_2.

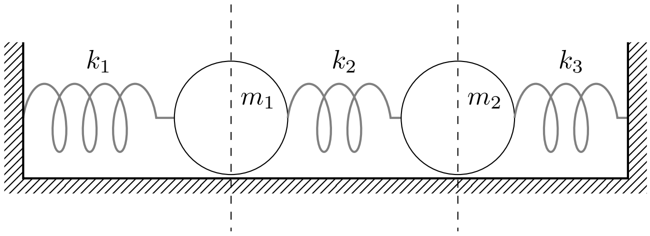

Figure 1: Positions d'équilibre

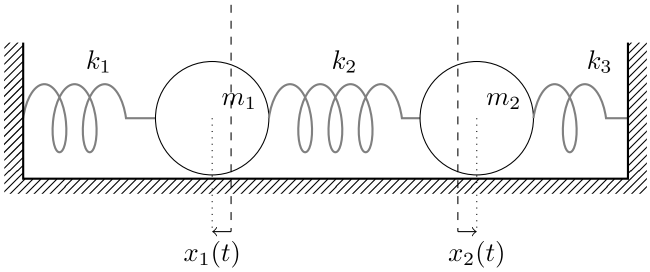

Figure 2: En mouvement

Le système d'équations de mouvement du système s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1+k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) & = 0 \quad (2a) \\ m_2\ddot{x}_2(t) + (k_2+k_3)x_2(t) - k_2x_1(t) & = 0 \quad (2b) \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$. Le temps final T sera égal à 20.

Q. 6 *Ecrire le problème* (2a)-(2b) *sous la forme d'un problème de Cauchy.* □

Q. 7 (Algorithmique) *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (2a)-(2b) *avec les données initiales spécifiées. On prendra $m_1 = 1/2$, $m_2 = 2/3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3/2$ et $k_3 = 2$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2. On utilisera pour celà la fonction* PLOT(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □

EXERCICE 2 : E.D.P. (10 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + \nu(x)u(x) = g(x), \ \forall x \in]a; b[, \quad (1)$$

$$u(a) = \alpha, \quad (2)$$

$$u'(b) + 3u(b) = \beta. \quad (3)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et ν est une fonction strictement positive.

Q. 1 **(a)**. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

(b). *Quelles sont les données du problème* (1)-(3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

(c). *Quelles sont les inconnues du problème* (1)-(3)*? (préciser le type)*

(d). *Quelles sont les conditions initiales?*

(e). *Quelles sont les conditions aux limites?* □

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1) à (3) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -u_{i+1} + (2 + h^2\nu_i)u_i - u_{i-1} &= h^2 g_i, & (4) \\ (1 + 3h)u_N - u_{N-1} &= h\beta. & (5) \end{aligned}$$

Q. 2 **(a)**. *Expliquer en détail comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i, g_i, ν_i et h?*

(b). *Expliquer en détail comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (3).*

(c). *Donner une discrétisation détaillée du problème (1) à (3) en utilisant entre autres les schémas (4) et (5).*

(d). *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.* ☐

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). ☐

Q. 4 (Algorithmique) *Ecrire la fonction* Assemble *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r_1 & s_1 & t_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r_{d-2} & s_{d-2} & t_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

où r_i, s_i, t_i, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 et ν_3 sont des réels donnés. ☐

Q. 5 (Algorithmique) *Ecrire la fonction algorithmique* resEDP *permettant de résoudre le problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5). Cette fonction devra retourner la discrétisation $(x_i)_{i=0}^N$ de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas de discrétisation et l'ensemble des $(u_i)_{i=0}^N$.* ☐

Q. 6 (Algorithmique) *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) utilisant la fonction* resEDP *dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^2)$. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour celà, on utilisera la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐