

# Méthodes Numériques II

## Chapitre 1: Algorithmique

### Exercices axés sur l'algèbre linéaire

#### EXERCICE 1

Soient  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Q. 1 Ecrire une fonction `dot` permettant de calculer le produit scalaire du vecteur  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{v}$ , noté mathématiquement par  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ . □

Q. 2 Ecrire une fonction `norm2` permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{u}$  donnée par  $\|\mathbf{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ . □

Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

Q. 3 Ecrire une fonction `aUpbV` permettant de calculer le vecteur  $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ . □

Q. 4 Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$  avec  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . □

#### EXERCICE 2

Q. 1 Ecrire une fonction `VecZeros` retournant le vecteur nul de  $\mathbb{R}^n$ . □

Q. 2 Ecrire une fonction `VecConst` retournant le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes valent  $\alpha \in \mathbb{R}$ . □

Q. 3 Soient  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ecrire une fonction `VecPlusConst` retournant le vecteur de  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \alpha.^\dagger$$

□

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique `rand()` retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Q. 4 Ecrire une fonction `VecRand` retournant un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur  $[a, b]$ . □

#### EXERCICE 3

Q. 1 Ecrire une fonction `MatZeros` retournant la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ . □

<sup>†</sup>Cette opération n'est pas une opération algébrique dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire mathématiquement, on ne peut pas écrire  $\mathbf{u} + \alpha$ !

**Q. 2** Ecrire une fonction `MatConst` retournant la matrice de  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  dont toutes les composantes valent  $\alpha \in \mathbb{R}$ . □

**Q. 3** Soient  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ecrire une fonction `MatPlusConst` retournant la matrice  $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad B_{i,j} = A_{i,j} + \alpha.^\ddagger$$

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique `rand()` retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Q. 4** Ecrire une fonction `MatRand` retournant une matrice de  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur  $[a, b]$ . □

#### EXERCICE 4

Soit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

**Q. 1** a. Ecrire une fonction algorithmique `setMatCol` permettant d'initialiser le  $j$ -ème vecteur colonne de  $A$  par un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , avec  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

b. Ecrire une fonction algorithmique `getMatCol` retournant le  $j$ -ème vecteur colonne de  $A$  avec  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . □

**Q. 2** a. Ecrire une fonction algorithmique `setMatRow` permettant d'initialiser le  $i$ -ème vecteur ligne de  $A$  par un vecteur  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , avec  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ .

b. Ecrire une fonction algorithmique `getMatRow` retournant le  $i$ -ème vecteur ligne de  $A$  avec  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . □

#### EXERCICE 5

**Q. 1** Soient  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Ecrire une fonction `aApbB` permettant de calculer la matrice  $W \stackrel{\text{def}}{=} \alpha A + \beta B$ . □

**Q. 2** Soient  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{u}$  un vecteur (colonne).

a. A quelle(s) condition(s) le produit de la matrice  $A$  par le vecteur  $\mathbf{u}$  existe-t'il?

b. Sous les conditions précédentes, on note  $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} A\mathbf{u}$ .

- A quel espace appartient  $\mathbf{v}$ ?
- Rappeler précisément la formule permettant de calculer les composantes de  $\mathbf{v}$ .

c. Ecrire une fonction `ProdMatVec` permettant de calculer  $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} A\mathbf{u}$ .

d. Donner un exemple algorithmique d'utilisation. □

#### EXERCICE 6

<sup>‡</sup>Cette opération n'est pas une opération algébrique dans  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , c'est à dire mathématique, on ne peut pas écrire  $A + \alpha$ !

**Q. 1** Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Écrire la fonction `ProdSca` permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs noté mathématiquement  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .  $\square$

L'objectif de la suite de l'exercice est de voir plusieurs manières de programmer le produit d'une matrice par un vecteur. Soient  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

**Q. 2** a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de  $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$ .

b. Écrire la fonction `ProdMatVec` permettant de retourner  $\mathbb{A}\mathbf{u}$ .  $\square$

Voici quelques notations mathématiques (non standards) que l'on va utiliser. Si  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$  correspond au  $j$ -ème vecteur colonne de  $\mathbb{A}$ .
- $\mathbb{A}_{i,:}$  correspond au  $i$ -ème vecteur ligne de  $\mathbb{A}$ .

On suppose que l'on dispose des commandes suivantes au niveau algorithmique:

Description	Avec fonction	Instruction simplifiée
Obtenir la $j$ -ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , math. noté $\mathbb{A}_{:,j}$	$\mathbf{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\mathbf{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$
Obtenir la $i$ -ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , math. noté $\mathbb{A}_{i,:}$	$\mathbf{v} \leftarrow \text{getMatRow}(\mathbb{A}, i)$	$\mathbf{v} \leftarrow \mathbb{A}(i, :)$
Remplacer la $j$ -ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \mathbf{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \mathbf{u}$
Remplacer la $i$ -ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatRow}(\mathbb{A}, \mathbf{v}, j)$	$\mathbb{A}(i, :) \leftarrow \mathbf{v}$ .

Table 1: Instructions algorithmiques pour accéder/modifier une ligne ou une colonne d'une matrice  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

**Q. 3** a. Sous les hypothèses de **Q.2** et avec  $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$ , écrire mathématiquement  $v_i$  comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées ci-dessus.

b. Écrire la fonction `ProdMatVecFun` permettant de retourner  $\mathbb{A}\mathbf{u}$  en utilisant la fonction `ProdSca` et les fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées).

c. Écrire la fonction `ProdMatVecSim` permettant de retourner  $\mathbb{A}\mathbf{u}$  en utilisant la fonction `ProdSca` et les instructions simplifiées de la Table 1 (i.e. sans utiliser les fonctions).  $\square$

Soient  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ .

**Q. 4** a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de  $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ .

b. Écrire la fonction `ProdMatMat` permettant de retourner  $\mathbb{G}$ .  $\square$

**Q. 5** Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note  $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ .

a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire  $\mathbb{G}_{i,j}$  comme un produit scalaire entre un vecteur ligne de  $\mathbb{A}$  et un vecteur colonne de  $\mathbb{B}$ .

b. Écrire la fonction `ProdMatMatFun1` permettant de retourner  $\mathbb{G}$  en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction `ProdSca`.

c. Écrire la fonction `ProdMatMatSim1` permettant de retourner  $\mathbb{G}$  en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction `ProdSca`.  $\square$

**Q. 6** Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note  $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ .

- a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire  $\mathbb{G}_{:,j}$  ( $j$ -ème vecteur colonne de  $\mathbb{G}$ ) comme le produit de la matrice  $\mathbb{A}$  par un vecteur colonne de  $\mathbb{B}$ .
- b. Ecrire la fonction `ProdMatMatFun2` permettant de retourner  $\mathbb{G}$  en utilisant la formule trouvée en **Q.6 a.**, des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction `ProdMatVecFun`.
- c. Ecrire la fonction `ProdMatMatSim2` permettant de retourner  $\mathbb{G}$  en utilisant la formule trouvée en **Q.6 a.**, des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction `ProdMatVecSim`.

□