

# Exercices associés au cours *Méthodes Numériques II*

## Chapitre 1: *Algorithmique*

### 1 Numériques

#### EXERCICE 1

Soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Ecrire la fonction algorithmique **sum01** permettant de calculer

$$\sum_{k=1}^m k \cos\left(\frac{2\pi k}{m}t\right).$$

#### EXERCICE 2

Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{R}$ . On souhaite calculer

$$\prod_{n=1}^k (2n-1) \cos(2kz/n)^k$$

**Q. 1** Ecrire la fonction algorithmique **PROD01** permettant de faire ce calcul en utilisant la fonction puissance **POWER(X,Y)** ou **X^Y** correspondant à  $x^y$ .  $\square$

**Q. 2** Ecrire la fonction algorithmique **PROD02** permettant de faire ce calcul sans utiliser la fonction puissance **POWER** ou l'opérateur  $\wedge$ . On rappelle que si  $k \in \mathbb{N}$  alors  $x^k = \prod_{i=1}^k x$ .  $\square$

#### EXERCICE 3

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right\}.$$

Ecrire la fonction **SFT** permettant de calculer  $x_n(t)$  correspondant à la série  $x(t)$  tronquée au  $n$ -ième terme.

#### EXERCICE 4

Soient  $(y_i)_{i=1}^m$  et  $(x_k)_{k=1}^n$  des réels. Le réel  $A$  est donné par

$$A = \prod_{k=1}^n \cos(x_k) \sum_{i=1}^m \sin(y_i) \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}x_k\right).$$

- Q. 1** a. Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer  $A$ ? Préciser leurs types et leurs dimensions.
- b. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer  $A$ . Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.
- c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction. □

### EXERCICE 5

Soient  $x$  un réel,  $m, n, p, q$  des entiers strictement supérieurs à 1,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^q$ .  
Le réel  $y$  est donné par

$$y = \prod_{i=1}^m \left( (x + \sin(u_i)) \sum_{k=1}^n (k + (x - i)^2) \right)$$

- Q. 1** a. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer  $y$ ? Préciser les types et les dimensions.
- b. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer  $y$ . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
- c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction. □

Soit  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^p \left( (u_i - k \sin(x)) \prod_{j=1}^q (v_k + (x - j)^2) \right), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

- Q. 2** a. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer  $\mathbf{z}$ ? Préciser les types et les dimensions.
- b. Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer  $\mathbf{z}$ . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
- c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction. □

### EXERCICE 6

Dans cet exercice les notations suivantes seront utilisées. Si  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$  correspond au  $j$ -ème vecteur colonne de  $\mathbb{A}$  et s'écrit algorithmiquement  $\mathbb{A}(:, j)$ . Si on écrit  $\mathbf{v} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$  alors l'accès aux éléments de  $\mathbf{v}$  s'effectue avec la commande  $\mathbf{v}(i)$ . De plus, au niveau algorithmique, si  $\mathbf{w}$  est un vecteur colonne ou ligne de dimension  $m$ , alors  $\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \mathbf{w}$  est autorisé et correspond mathématiquement à  $\mathbb{A}_{:,j} = \mathbf{w}$  ou  $\mathbb{A}_{:,j} = \mathbf{w}^t$  c'est à dire  $\mathbb{A}_{i,j} = \mathbf{w}_i, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ .
- $\mathbb{A}_{i,:}$  correspond au  $i$ -ème vecteur ligne de  $\mathbb{A}$  et s'écrit algorithmiquement  $\mathbb{A}(i, :)$  et si on écrit  $\mathbf{u} \leftarrow \mathbb{A}(i, :)$  alors l'accès aux éléments de  $\mathbf{u}$  s'effectue avec la commande  $\mathbf{u}(j)$ . De plus, au niveau algorithmique, si  $\mathbf{w}$  est un vecteur ligne ou colonne de dimension  $n$ , alors  $\mathbb{A}(i, :) \leftarrow \mathbf{w}$  est autorisé et correspond mathématiquement à  $\mathbb{A}_{i,:} = \mathbf{w}$  ou  $\mathbb{A}_{i,:} = \mathbf{w}^t$  c'est à dire  $\mathbb{A}_{i,j} = \mathbf{w}_j, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Q. 1** Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Ecrire la fonction `ProSca` permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs. □

**Q. 2** Soient  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

- a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de  $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$ .
  - b. Ecrire la fonction `ProMatVec1` permettant de retourner  $\mathbb{A}\mathbf{u}$ .
  - c. Ecrire  $\mathbf{v}_i$  comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées en début d'exercice.
  - d. Ecrire la fonction `ProMatVec2` permettant de retourner  $\mathbb{A}\mathbf{u}$  en utilisant la fonction `ProSca`.
- 

**Q. 3** Soient  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ .

- a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de  $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ .
  - b. Ecrire la fonction `ProMatMat1` permettant de retourner  $\mathbb{C}$ .
  - c. Ecrire  $\mathbb{C}_{:,j}$  ( $j$ -ème vecteur colonne de  $\mathbb{C}$ ) comme un produit matrice vecteur
  - d. Ecrire la fonction `ProMatMat2` permettant de retourner  $\mathbb{C}$  en utilisant la fonction `ProMatVec2`.
-

## 2 Graphiques

### EXERCICE 7

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a < b$ . On note  $(x_i)_{i=0}^n$  les  $n+1$  points de la discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$  donnés par  $x_i = a + ih$  avec  $h = (b - a)/n$ .

**Q. 1** Ecrire une fonction *DisReg* permettant d'obtenir les  $(n+1)$  points de la discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ .  $\square$

Soient  $A = (x_A, y_A)$  et  $B = (x_B, y_B)$  deux points du plan tels que  $x_A < x_B$  et  $y_A < y_B$ . Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_B, y_A)$ ,  $(x_B, y_B)$  et  $(x_A, y_B)$ .

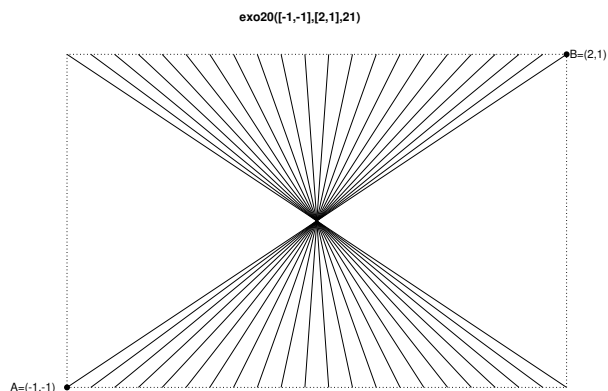
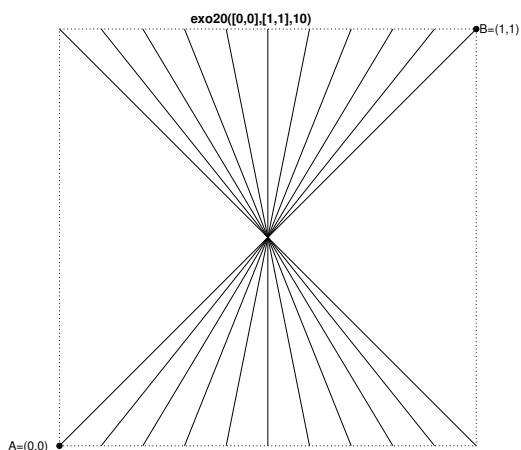
On suppose que pour tracer le segment  $[AB]$  on dispose de la commande

`plot([x_A, x_B], [y_A, y_B]).`

**Q. 2** Ecrire une fonction *exo20* de paramètres  $A$ ,  $B$  et  $n$  permettant de

- représenter les bords du rectangle,
- relier les points des bords haut et bas, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en  $n+1$  points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :

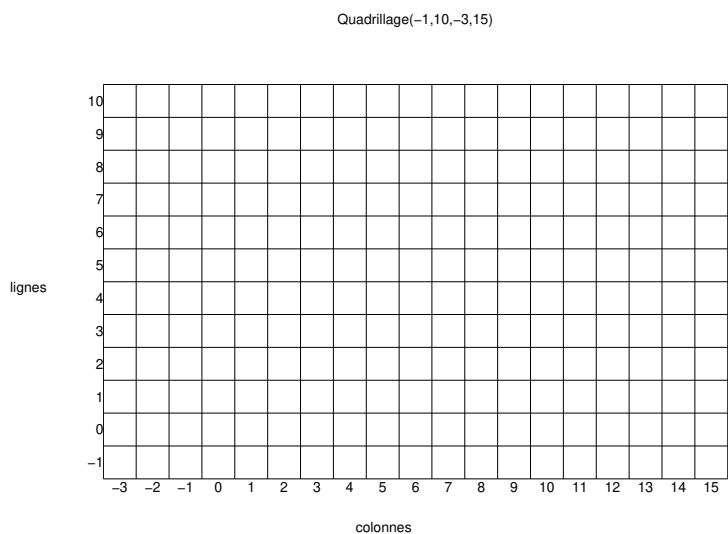


$\square$

Pour les exercices suivants, on dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction

`quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)`

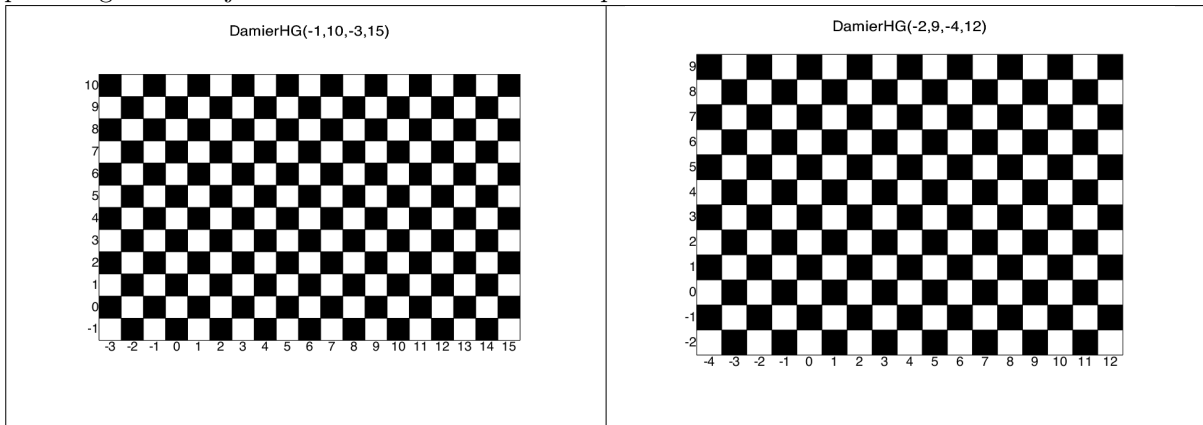
dont voici un exemple d'utilisation



On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne  $i$  et colonne  $j$  d'un quadrillage.

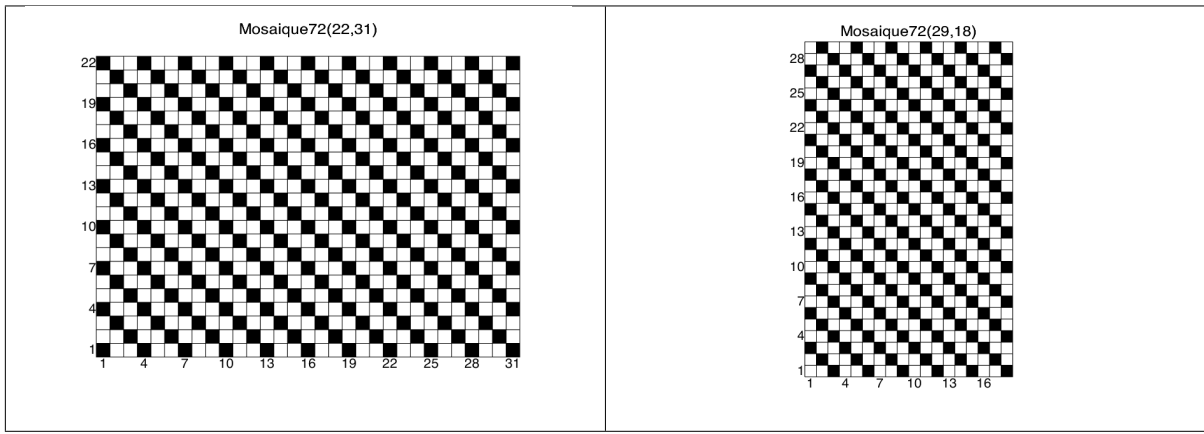
### EXERCICE 8

Ecrire la fonction `DamierHG(imin,imax,jmin,jmax)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage obtenu par la commande `Quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` sachant que le pavé en haut à gauche d'un quadrillage doit toujours être noir. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



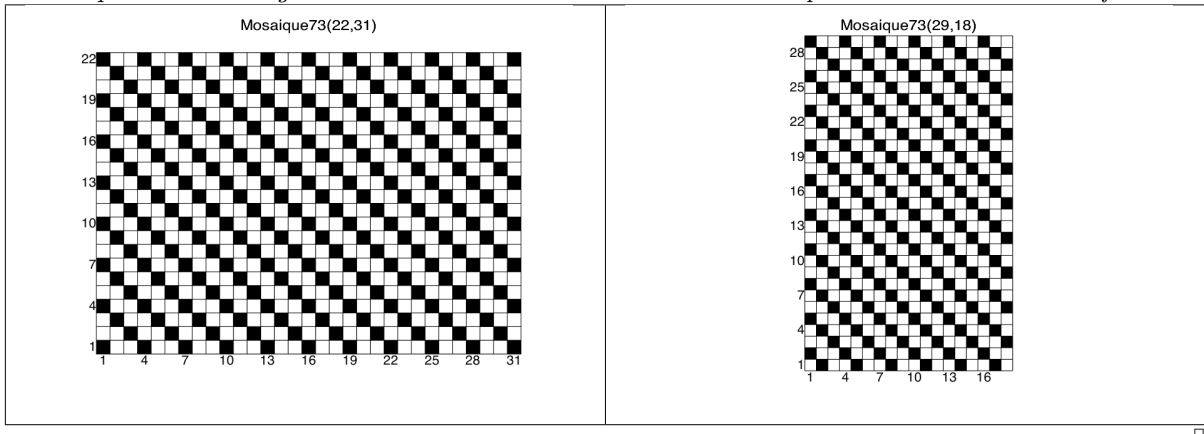
### EXERCICE 9

**Q. 1** Ecrire la fonction `Mosaique72(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `Quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case en ligne 1 et colonne  $m$  est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



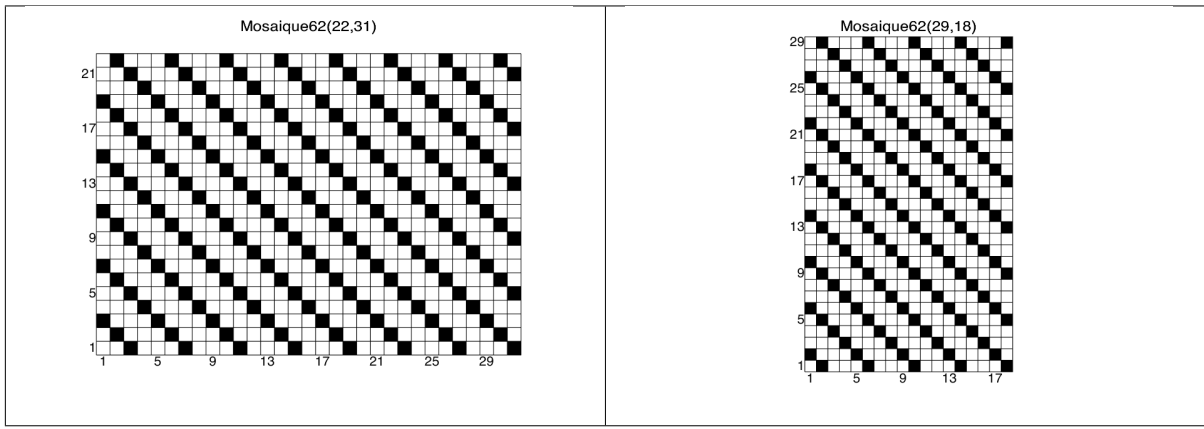
**EXERCICE 10**

**Q. 1** Ecrire la fonction `Mosaique73(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `Quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case en ligne `n` et colonne `1` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



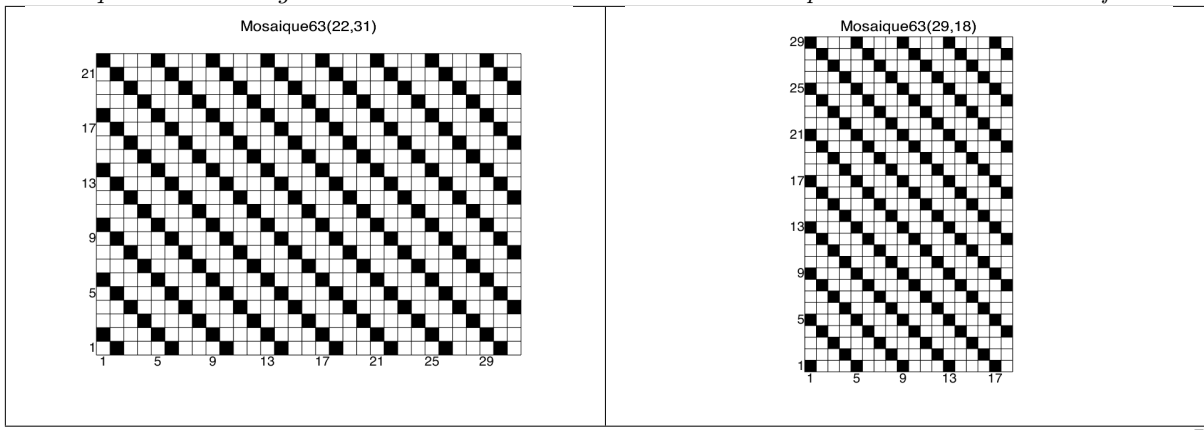
**EXERCICE 11**

**Q. 1** Ecrire la fonction `Mosaique62(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `Quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case en ligne `1` et colonne `m` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



**EXERCICE 12**

**Q. 1** Ecrire la fonction `Mosaïque63(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `Quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case en ligne `n` et colonne `1` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



**EXERCICE 13**

**Q. 1** Ecrire la fonction `Mosaïque80(n)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `Quadrillage(-n,n,-n,n)` Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

